

I. MUNTEANU

L. ION

N. TOMOZEIU

FIZICA SEMICONDUCTORILOR

în

probleme și exerciții

EDITURA UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

1994

I. MUNTEANU

L. ION

N. TOMOZEIU

FIZICA SEMICONDUCTORILOR
în
probleme și exerciții

EDITURA UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI
- 1994 -

**Referenți științifici: Prof. dr. Gh. Ciobanu
Lector dr. A. Dafinei**

**Toate drepturile sunt rezervate Editurii Universității București.
Orice reproducere sau traducere, fie și parțială, precum
și contrafacerile de orice tip, intră sub incidența Codului Penal.**

ISBN – 973 – 9160 – 74 – 3

I. PROBLEME GENERALE DE FIZICA SOLIDULUI

1. Elemente de cristalografie	2
2. Difracția razelor X pe cristale	25
3. Energia rețelei	28
4. Proprietăți termice ale corpului solid	33
5. Defecte în cristale.Difuzia.	36

II. FIZICA SEMICONDUCTORILOR

6. Statistica electronilor și golurilor în semiconductori	41
7. Recombinarea purtătorilor de sarcină în semiconductori	57
8. Difuzia și driftul purtătorilor de sarcină	66
9. Fenomene de transport în câmp magnetic	80
10.Fenomene de suprafață	90
11.Efectul fotovoltaic în semiconductori	109
12.Proprietăți optice ale semiconductoarelor	117
13.Tehnologia semiconductoarelor	124
14.Fizica dispozitivelor cu semiconductori	131
ANEXA 1	141
ANEXA 2	143
Bibliografie	144

I. PROBLEME GENERALE DE FIZICA SOLIDULUI

I.ELEMENTE DE CRISTALOGRAFIE

1.1- Să se arate că într-o rețea cristalină nu poate exista o axă de simetrie de ordin C_5 .

Soluție

Presupunem că este posibilă prezenta unei axe C_5 într-o rețea cristalină și fie a_1 unul dintre nodurile cele mai apropiate de axă. După rotații succesive de 72° a_1 va trece respectiv în pozițiile a_2, a_3, a_4 și a_5 (fig.1). Unind nodurile a_1 și a_4 se va obține o dreaptă paralelă cu latura a_2a_3 a pentagonului și întrucât pe direcțiile cristalografice paralele nodurile sunt plasate la distanțe identice, pe dreapta a_1a_4 trebuie să existe și nodul K. Dar atunci K ar fi mai aproape de axa C_5 decât oricare dintre a_1, a_2, \dots , ceea ce ar contrazice ipoteza inițială. Prin urmare, o rețea cristalină nu poate prezenta axe de simetrie C_5 .

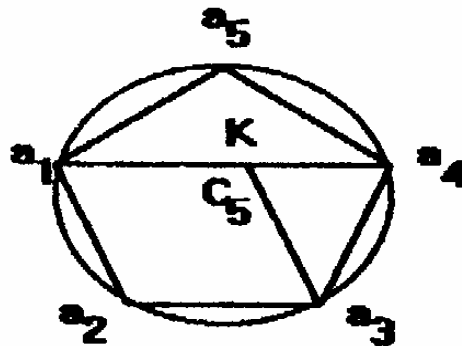


Fig. 1.

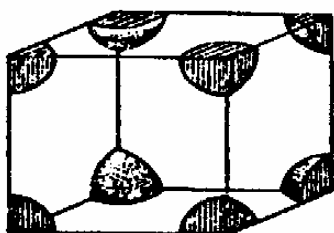
1.2 - Să se precizeze numărul de atomi conținuți în celula elementară în următoarele cazuri: a) rețea cubică simplă; b) rețea cubică cu volum centrat; c) rețea cubică cu fețe centrate; d) rețea hexagonal compactă.

Soluție

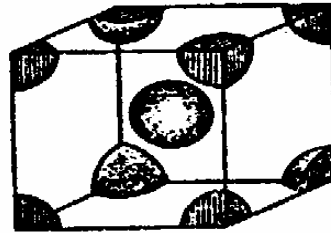
În primele trei situații numărul de atomi din celulă este dat de relația:

$$N = \frac{1}{8} \times V + \frac{1}{2} \times F + I$$

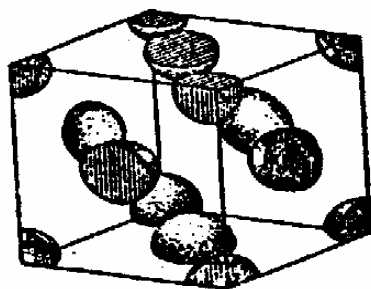
unde V este numărul atomilor din vârfuri, F este numărul atomilor de pe fețe, iar I este numărul atomilor din volumul celulei. Deci: a) $N_{cs}=1$; b) $N_{ccv}=2$; c) $N_{cfc}=4$.



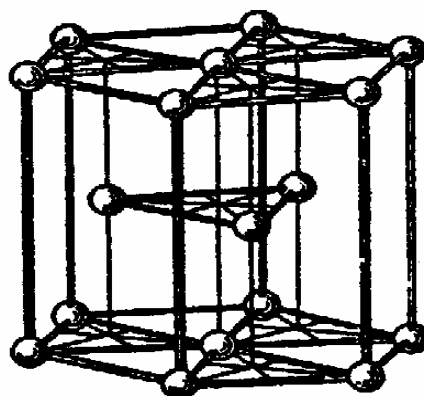
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.2.

d) În cazul structurii hexagonale compacte celula elementară conține 6 atomi: 3 atomi aflați în vârfurile celulei, 1 datorat contribuției celor doi situați în centrele bazelor (fiecare aparținând la două celule vecine) și 2 datorati contribuției celor 12 atomi din vârfurile celulei, fiecare aparținând la 6 celule vecine.

1.3 - Să se arate că pentru o structură hexagonală compactă $c/a=1.633$, c fiind înălțimea celulei elementare, iar a latura bazei.

Soluție

Structura hexagonală compactă apare la așezarea atomilor în straturi după schema ABAB... Într-o asemenea structură 3 atomi dintr-un strat și unul dintr-un strat vecin formează un tetraedru de înălțime $c/2$ (fig.3). Întrucât:

$$\frac{c}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

rezultă:

$$\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1.633$$

1.4- O structură de tip CVC este constituită din atomi de același tip, de rază r . Considerând atomii sfere rigide, tangente în cazul celor aflate pe diagonala spațială a cubului, să se calculeze coeficientul de umplere al unei astfel de structuri.

Soluție

Coeficientul de umplere este definit de relația:

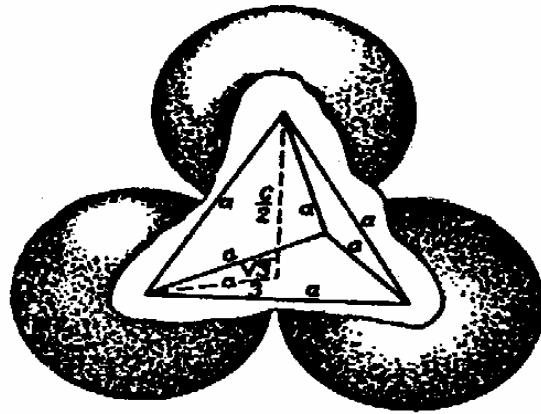


Fig.3.

$$k = \frac{NV_1}{V}$$

unde N este numărul atomilor din celulă, V_1 este volumul unui atom, iar V este volumul celulei elementare. Cum pe diagonala spațială a cubului se află trei sfere în tangență, rezultă că

$$a\sqrt{3} = 4r$$

și deci, având în vedere că pentru o structură CVC, $N=2$, rezultă că.

$$k = \frac{2 \times \frac{4\pi}{3} r^3}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}} r\right)^3} = 0.68$$

1.5 - Fie rețelele cubică cu fețe centrate și hexagonal compactă, constituite din atomi identici considerați a fi sfere rigide. Să se calculeze factorul de umplere pentru cele două structuri.

Soluție

Pentru rețeaua CFC $N=4$, iar volumul celulei elementare este $16\sqrt{2} \cdot r^3$,

Deci:

$$k = \frac{4 \times \frac{4\pi}{3} r^3}{16\sqrt{2} r^3} = 0.74$$

Celula elementară a rețelei HC conține 6 atomi, iar volumul ei, exprimat în funcție de raza atomului, este $24\sqrt{2} \cdot r^3$. Rezultă:

$$k = \frac{6 \times \frac{4\pi}{3} r^3}{24\sqrt{2} r^3} = 0.74$$

Prin urmare în cele două structuri, cele mai compacte, atomii ocupă doar 74% din volumul total al rețelei.

1.6 - Atomii a și b, considerați sfere rigide de raze r_a și r_b , formează un cristal având o structură de tipul CsCl. Să se arate că atomii plasați pe diagonalaspațială a cubului nu se pot afla în tangență dacă r_a / r_b (sau r_b / r_a) depășește valoarea 1.87.

Soluție

Structura de tip CsCl are numărul de coordinație $z=8$. Limita inferioară de stabilitate a structurii este determinată de ecuația (fig. 4):

$$2r_a + 2r_b = 2r_b \sqrt{3}$$

de unde:

$$\frac{r_a}{r_b} = 0.73$$

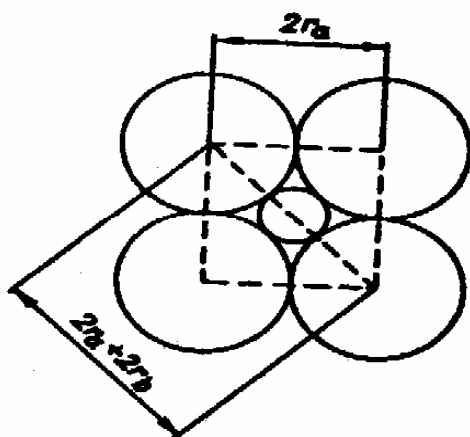


Fig.4

Limita superioară de stabilitate a structurii cu numărul de coordinație 8 este determinată de mărimea inversă:

$$\frac{r_b}{r_a} = 1.37$$

1.7 - O rețea cristalină ionică este formată din ioni cu sarcinile $z_1 = 4$ și $z_2 = 1$. Să se demonstreze că în acest caz structura cea mai probabilă este cea cu numărul de coordinație 6.

Soluție

Dacă doi ioni de sarcini $z_1 q$ și $z_2 q$ se află la distanța x într-un mediu de constantă dielectrică ϵ , ei interacționează cu o forță:

$$F = \frac{z_1 z_2 q^2}{4 \pi \epsilon} \times \frac{1}{x^2}$$

La apropierea lor de la infinit până la distanța r energia potențială variază cu mărimea:

$$U = \int_{\infty}^r F dx = \frac{z_1 z_2 q^2}{4 \pi \epsilon} \int_{\infty}^r \frac{dx}{x^2} = - \frac{z_1 z_2 q^2}{4 \pi \epsilon} \times \frac{1}{r}$$

Energia sistemului de sarcini poate fi privită ca suma energiilor de interacție ale ionilor din sistem. Dacă la apropierea ionilor s-ar forma o rețea cristalină cu numărul de coordinație $z=4$ (fig.5a) energia potențială a sistemului ar fi :

$$U_4 = - \frac{q^2}{4 \pi \epsilon} \left(4 \frac{z_1 z_2}{r} - 6 \frac{z_2 z_2}{a} \right) = - \frac{q^2}{4 \pi \epsilon} \times \frac{4 z_1 z_2 - 3.68 z_2^2}{r}$$

Pentru $z=6$ și $z=8$ (fig.5b,c) energia potențială este dată de:

$$U_6 = - \frac{q^2}{4 \pi \epsilon} \left(6 \frac{z_1 z_2}{r} - 12 \frac{z_2^2}{a} - 3 \frac{z_2^2}{b} \right) = - \frac{q^2}{4 \pi \epsilon} \times \frac{6 z_1 z_2 - 10 z_2^2}{r}$$

$$U_8 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \left(8\frac{z_1 z_2}{r} - 12\frac{z_2^2}{a} - 12\frac{z_2^2}{b} - 4\frac{z_2^2}{c} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{8z_1 z_2 - 19.75z_2^2}{r}$$

Pentru $z_1=4$ și $z_2=1$, se obține:

$$U_4 = -1232\frac{q^2}{4\pi\epsilon} \times \frac{1}{r}; U_6 = -14\frac{q^2}{4\pi\epsilon} \times \frac{1}{r}; U_8 = -1225\frac{q^2}{4\pi\epsilon} \times \frac{1}{r}$$

și deci, cea mai stabilă este structura cu numărul de coordinație $z=6$.

1.8- Să se determine segmentele interceptate pe axele cristalografice de planul (125).

Soluție

Scriem mărimile inverse indicilor planului: $1/1, 1/2, 1/5$. Numitorul comun este 10, iar din:

$$A:B:C = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{5}$$

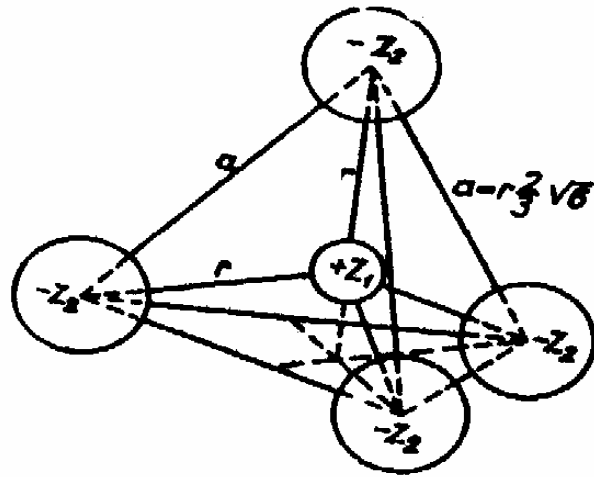
rezultă $A=10, B=5, C=2$.

1.9 - Să se găsească indicii Miller ai planului care trece prin nodurile de coordonate $[[900]], [[0,10,0]]$ și $[[0,0,30]]$ ale unei rețele cristaline de parametri $a=3, b=5$ și $c=6$.

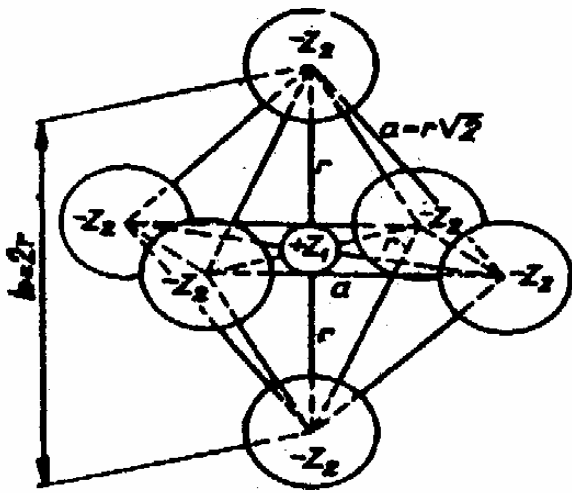
Soluție

Din teoria rețelei cristaline rezultă că:

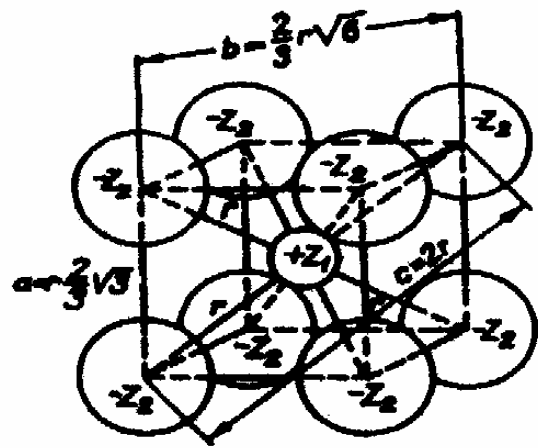
$$h:k:l = \frac{a}{A} : \frac{b}{B} : \frac{c}{C}$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.

unde h, k, l sunt indicii Miller. În cazul de față:

$$h:k:l = \frac{3}{9} : \frac{5}{10} : \frac{6}{30} = 10:15:6$$

deci planul căutat este (10, 15, 6)

1.10 - Se dau planele (320) și (110). Se cere simbolul dreptei ce rezultă din intersecția lor.

Soluție

Ecuțiile planelor din familiile (h_1, k_1, l_1) și (h_2, k_2, l_2) ce trec prin origine sunt:

$$h_1 u + k_1 v + l_1 w = 0$$

$$h_2 u + k_2 v + l_2 w = 0$$

unde $[[uvw]]$ desemnează coordonatele nodurilor continute în plane. Cele situate pe intersecție trebuie să satisfacă simultan cele două ecuații. Se obține imediat:

$$u:v:w = (k_1 l_2 - l_1 k_2) : (l_1 h_2 - l_2 h_1) : (h_1 k_2 - h_2 k_1)$$

Soluția se poate obține ușor din schema:

$$\begin{array}{c|cc} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \end{array}$$

În cazul de față:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

și deci $u=0-0=0$, $v=0-0=0$, $w=3-2=1$, astfel încât simbolul căutat este: $[001]$.

1.11. - Se dau direcțiile cristalografice $[\bar{1}30]$ și $[201]$. Se cere simbolul planului determinat de ele.

Soluție

Utilizând schema din problema precedentă rezolvarea este imediată:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

prin urmare $h=3-0=3$, $k=0+1=1$ și $l=0-6=-6$. Simbolul căutat este $(3\bar{1}6)$.

1.12 - Să se arate că dacă două rețele sunt reciproce una alteia atunci produsul volumelor celulelor lor primitive este 1.

Soluție

Vectorii elementari ai rețelei reciproce sunt definiți după cum urmează:

$$\vec{A} = 2\pi \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{V}; \quad \vec{B} = 2\pi \cdot \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{V}; \quad \vec{C} = 2\pi \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{V},$$

unde,

$$V = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$$

reprezintă volumul celulei primitive a rețelei directe. Având în vedere că volumul celulei primitive a rețelei reciproce este dat de relația,

$$V^* = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

și utilizând definițiile de mai sus cât și identitățile vectoriale:

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y}(\vec{x} \cdot \vec{z}) - \vec{z}(\vec{x} \cdot \vec{y}); \vec{x}(\vec{x} \times \vec{y}) = 0$$

se obține, după un calcul algebric simplu, că $V^* \times V = 1$.

1.13 - Să se demonstreze că distanța între planele (hkl) ale unei rețele cristaline este egală cu inversa lungimii vectorului \vec{R}_{hkl} care unește originea cu punctul $[[hkl]]$ al rețelei reciproce.

Soluție

Unul dintre planele din familie conține în mod necesar originea, aleasă într-un nod al rețelei, astfel că problema se reduce la calculul distanței din origine la cel mai apropiat plan de tip (hkl). Acesta din urmă va intersecta axele cristalografice în punctele $M(1/h, 0, 0)$, $P(0, 1/k, 0)$ și $Q(0, 0, 1/l)$, după cum rezultă din definiția indicilor Miller (fig.6). Întrucât

$$\vec{R}_{hkl} = h\vec{A} + k\vec{B} + l\vec{C}$$

$$M\vec{P} = -\frac{1}{h}\vec{a} + \frac{1}{k}\vec{b}$$

$$M\vec{Q} = -\frac{1}{h}\vec{a} + \frac{1}{l}\vec{c}$$

și având în vedere definițiile vectorilor fundamentali ai rețelei reciproce, se obține:

$$\vec{R}_{hkl} \cdot M\vec{P} = 0; \vec{R}_{hkl} \cdot M\vec{Q} = 0$$

adică \vec{R}_{hkl} este perpendicular pe planele (hkl) .

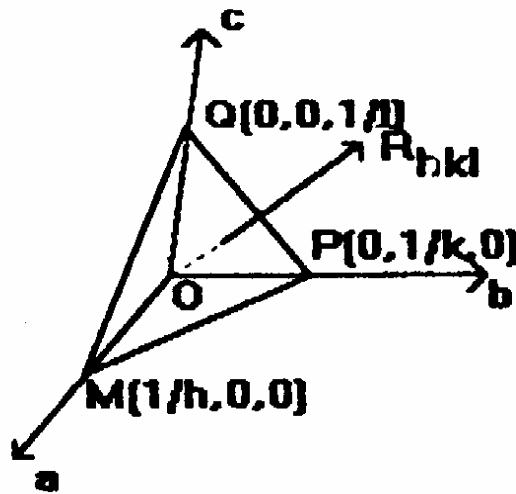


Fig.6.

Normala la planul considerat este deci:

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}_{hkl}}{R_{hkl}}$$

iar distanța cerută va fi,

$$d_{hkl} = O\vec{M} \cdot \vec{n} = \frac{1}{R_{hkl}}$$

1.14 - Să se obțină formulele de calcul pentru distanțele interplanare în cazul cristalelor din sistemele 1) triclinic, 2) rombic, 3) hexagonal, 4) tetragonal și 5) cubic.

Soluția:

Avem:

$$\vec{R}_{hkl} = h\vec{A} + k\vec{B} + l\vec{C}$$

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = R_{hkl}^2 = h^2 A^2 + k^2 B^2 + l^2 C^2 + 2hk\vec{A}\vec{B} + 2kl\vec{B}\vec{C} + 2lh\vec{C}\vec{A}$$

Tinând cont de definiția vectorilor fundamentali ai rețelei reciproce și de identitatea vectorială:

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot (\vec{z} \times \vec{w}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})(\vec{y} \cdot \vec{w}) - (\vec{x} \cdot \vec{w})(\vec{y} \cdot \vec{z})$$

se va obține:

1) a, b, c distincte, α, β, γ , oarecare (α este unghiul dintre b și c , β dintre a și c , γ dintre a și b),

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{V^2} (S_{11}h^2 + S_{22}k^2 + S_{33}l^2 + 2S_{12}hk + 2S_{23}kl + 2S_{13}hl)$$

unde,

$$S_{11} = b^2 c^2 \sin^2 \alpha;$$

$$S_{22} = a^2 c^2 \sin^2 \beta;$$

$$S_{33} = a^2 b^2 \sin^2 \gamma;$$

$$S_{12} = abc^2 (\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma);$$

$$S_{23} = a^2 bc (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha);$$

$$S_{13} = ab^2 c (\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta);$$

iar:

$$V = abc \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$$

este volumul celulei primitive.

2) a, b, c distincte, $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ deci:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \left(\frac{h}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{c}\right)^2$$

3) $a=b \neq c$, $\alpha=\beta=90^\circ$, $\gamma=120^\circ$, deci:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{h^2 + hk + k^2}{a^2} \right) + \frac{l^2}{c^2}$$

4) $a=b \neq c$, $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$, deci:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}$$

5) $a=b=c$, $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$, deci:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2}$$

1.15 - Să se determine condiția de perpendicularitate a două plane $(h_1 k_1 l_1)$ și $(h_2 k_2 l_2)$ în sistemul romboedric.

Soluție

Unghiul între două plane oarecare este unghiul dintre normale, deci unghiul dintre vectorii asociați din rețeaua reciprocă:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{R_1 R_2};$$

$$\vec{R}_1 = h_1 \vec{A} + k_1 \vec{B} + l_1 \vec{C};$$

$$\vec{R}_2 = h_2 \vec{A} + k_2 \vec{B} + l_2 \vec{C}.$$

După câteva calcule simple se obține:

$$\cos \varphi = \frac{d_1 d_2}{V^2} \left[S_{11} h_1 h_2 + S_{22} k_1 k_2 + S_{33} l_1 l_2 + S_{21} (k_1 l_2 + k_2 l_1) + S_{13} (l_1 h_2 + l_2 h_1) + S_{12} (h_1 k_2 + h_2 k_1) \right]$$

unde semnificațiile mărimilor care apar sunt cele din problema precedentă, iar d_1 și d_2 sunt distanțele interplanare pentru cele două tipuri de plane indicate în enunț. Condiția de perpendicularitate cerută constă în anularea parantezei pătrate din expresia precedentă. Pentru sistemul romboedric avem ($a=b=c$, $\alpha=\beta=\gamma \neq 90^\circ$):

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = S_{33} = a^4 \sin^2 \alpha; \\ S_{12} &= S_{23} = S_{13} = a^4 \cos \alpha (\cos \alpha - 1), \end{aligned}$$

astfel încât condiția căutată capătă forma:

$$\sin^2 \alpha (h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2) - \cos \alpha (1 - \cos \alpha) (k_1 l_2 + k_2 l_1 + l_1 h_2 + l_2 h_1 + h_1 k_2 + h_2 k_1) = 0$$

1.16 - Dacă m_1 , m_2 și m_3 sunt indicii Miller ai unei direcții cristalografice din sistemul hexagonal atunci să se găsească indicii Bravais corespunzători.

Soluție

În principiu, cu ajutorul indicilor Miller pot fi definite direcțiile și planele cristaline pentru orice cristal. Cristalografii nu utilizează însă indicii Miller raportați la sistemul hexagonal de coordonate, ci preferă indicii Bravais. Acest lucru se explică prin tendința de a caracteriza planele și direcțiile simetric echivalente printr-un set de indici « simetrici ». În acest scop, pentru a pune mai bine în evidență simetria cristalelor din singonia hexagonală, se utilizează un sistem de coordonate cu patru axe: în planul de bază, suplimentar față de axele X și Y, orientate după \vec{a} și \vec{b} , se introduce încă o axă, U, orientată după vectorul $\vec{u} = -\vec{a} - \vec{b}$. Axa principală, Z, este orientată după vectorul \vec{c} (Fig.7.). Planele și direcțiile cristalografice sunt caracterizate acum prin orientarea față de toate cele patru axe și, corespunzător acestora, prin patru indici, m care se numesc « indicii Bravais ». Suma primilor trei indici este întotdeauna egală cu zero. Indicii Bravais ai unei direcții, \vec{R}_m , sunt tocmai coeficienții descompunerii vectorului \vec{R}_m după cei patru vectori \vec{a} , \vec{b} , $-\vec{a} - \vec{b}$, \vec{c} , cu condiția ca suma primilor trei coeficienți să

fie egală cu zero. Din această definiție rezultă modul de trecere de la scrierea vectorială obișnuită la indicii Bravais. Vectorul unei direcții cristalografice $[m_1 m_2 m_3]$ se poate scrie sub forma,

$$\vec{R}_m = m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + 0 \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) + m_3 \vec{c}$$

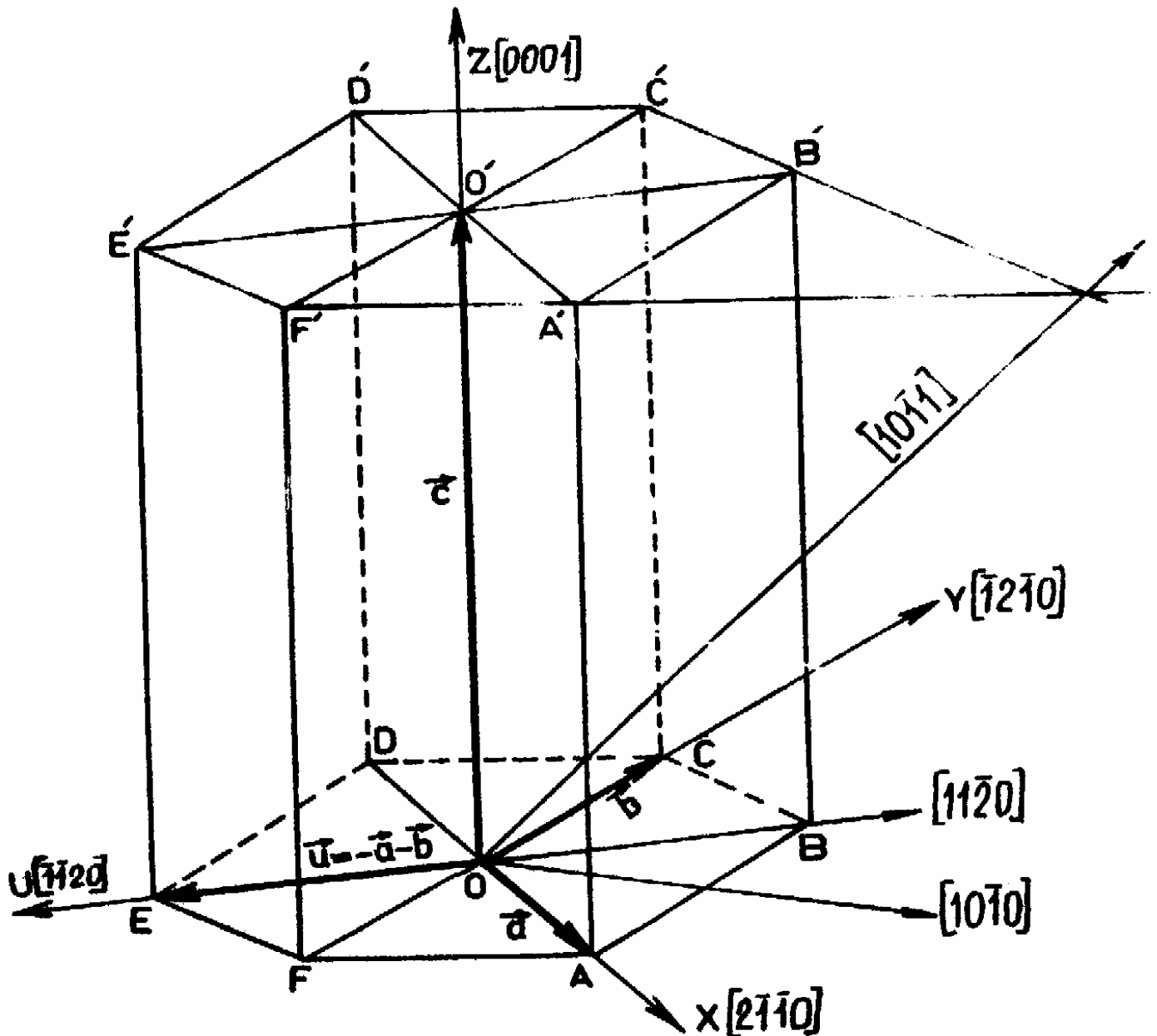


Fig.7. Indicii Bravais pentru axele principale și câteva direcții mai importante într-o celulă hexagonală.

Numerele $m_1, m_2, 0, m_3$ se deosebesc acum de indicii Bravais numai prin faptul că suma primilor trei indici nu este egală cu zero. Dacă la vectorul \vec{R}_m adăugăm vectorul,

$$\vec{t} = t\vec{a} + t\vec{b} + t \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) = 0,$$

atunci,

$$\vec{R}_m + \vec{t} = (m_1 + t)\vec{a} + (m_2 + t)\vec{b} + t(-\vec{a} - \vec{b}) + m_3\vec{c} = \vec{R}_m.$$

Punând condiția ca suma primilor trei indici să fie egală cu zero,

$$(m_1 + t) + (m_2 + t) + t = 0,$$

rezultă imediat,

$$t = -\frac{m_1 + m_2}{3},$$

și deci,

$$\vec{R}_m = \frac{2m_1 - m_2}{3}\vec{a} + \frac{2m_2 - m_1}{3}\vec{b} + \left(-\frac{m_1 + m_2}{3}\right) \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) + m_3\vec{c}.$$

Astfel, pentru direcția cristalografică $[m_1 m_2 m_3]$, indicii Bravais vor fi egali cu,

$$[2m_1 - m_2 \cdot 2m_2 - m_1 \cdot -m_1 - m_2 \cdot 3m_3]$$

Dacă se constată că indicii Bravais obținuți au un factor comun atunci pot fi simplificați prin acesta.

1.17 - Fie $[t_1 t_2 t_3 t_4]$ indicii Bravais ai unei direcții cristalografice. Să se găsească indicii Miller corespunzători.

Soluție

Din definiția indicilor Bravais rezultă că,

$$\vec{R}_m = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3 \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) + t_4\vec{c}$$

Astfel, indicii Miller corespunzători vor fi,

$$[l_1 - l_2 \cdot l_2 - l_3 \cdot l_4]$$

1.18 - Dacă (hkl) sunt indicii Miller ai unui plan atunci să se determine indicii Bravais corespunzători.

Soluție

Vectorul normalei la planul (hkl) este dat de ,

$$\vec{g} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3 \quad ,$$

unde,

$$\vec{b}_1 = 2\pi \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} \quad , \quad \vec{b}_2 = 2\pi \cdot \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} \quad , \quad \vec{b}_3 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$$

iar \vec{a}, \vec{b} și \vec{c} sunt vectorii fundamentali ai rețelei cristaline. Indicii Bravais sunt dați de coeficienții descompunerii vectorului normalei la planul cristalografic dat, după cei patru vectori,

$$\frac{2}{3}\vec{b}_1 - \frac{1}{3}\vec{b}_2 ; \frac{2}{3}\vec{b}_2 - \frac{1}{3}\vec{b}_1 ; -\frac{1}{3}\vec{b}_1 - \frac{1}{3}\vec{b}_2 ; \vec{b}_3$$

adică,

$$\vec{g} = h \cdot \frac{2\vec{b}_1 - \vec{b}_2}{3} + k \cdot \frac{2\vec{b}_2 - \vec{b}_1}{3} + l \cdot \frac{-\vec{b}_1 - \vec{b}_2}{3} + l' \cdot \vec{b}_3 \quad .$$

Astfel, indicii Bravais ai planului vor fi $(h'k'l')$. Din condiția ca suma primilor trei indici să fie egală cu zero și comparând cele două expresii pentru vectorul normalei \vec{g} , obținem sistemul de ecuații,

$$\left\{ \begin{array}{l} h' + k' + l' = 0 \quad , \\ \frac{2}{3}h' - \frac{1}{3}k' - \frac{1}{3}l' = h \quad , \\ -\frac{1}{3}h' + \frac{2}{3}k' - \frac{1}{3}l' = k \quad . \end{array} \right.$$

Rezolvând acest sistem se obține imediat,

$$h' = h, \quad k' = k, \quad l' = -h - k, \quad l' = l \quad .$$

Astfel, un plan caracterizat prin indicii Miller (hkl) în sistemul de axe cu trei vectori fundamentali va fi caracterizat în sistemul de axe cu patru vectori fundamentali cu ajutorul indicilor Bravais,

$$(h . k . -l - k . l).$$

1.19 - Să se determine rețeaua reciprocă a unei rețele ortorombice simple.

Soluție

Rețeaua ortorombică simplă este definită de vectorii fundamentali,

$$\vec{a} = a\hat{x}, \quad \vec{b} = b\hat{y}, \quad \vec{c} = c\hat{z}$$

unde a, b, c reprezintă lungimile muchiilor celulei elementare (paralelipiped drept), iar $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sunt versorii axelor de coordonate în sistemul de axe rectangular. ($\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$) în sistemul de axe rectangular. Din relațiile de mai sus și din relațiile care definesc vectorii fundamentali ai rețelei reciproce rezultă imediat,

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} = \frac{2\pi}{a} \cdot \hat{x}; \quad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} = \frac{2\pi}{b} \cdot \hat{y}; \quad \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} = \frac{2\pi}{c}$$

Observăm că rețeaua reciprocă este tot o rețea ortorombică simplă.

1.20 . Sa se determine rețeaua reciprocă a unei rețele cubice cu volum centrat.

Soluție

Rețeaua cubică cu volum centrat este generată de vectorii fundamentali ai celulei primitive din Fig.8(a).

$$\vec{a} = \frac{a}{2}(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}), \vec{b} = \frac{a}{2}(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}), \vec{c} = \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}) ,$$

Vectorii fundamentali ai rețelei reciproce se obțin folosind relațiile de definiție și proprietățile versorilor \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} și au forma,

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\hat{y} + \hat{z}); \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(\hat{z} + \hat{x}); \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(\hat{x} + \hat{y})$$

De aici rezultă că rețeaua reciprocă a unei rețele cubice cu volum centrat este tot o rețea cubică, dar cu fețe centrate.

1.21 - Să se determine rețeaua reciprocă a unei rețele cubice cu fețe centrate.

Soluție

Pentru rețeaua cubică cu fețe centrate, vectorii celulei primitive se aleg ca în Fig.8(b) și au forma,

$$\vec{a} = \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z}); \vec{b} = \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{z}); \vec{c} = \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{y})$$

Utilizând din nou relațiile de definiție ale vectorilor rețelei reciproce și proprietățile versorilor \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} , pentru vectorii fundamentali ai rețelei reciproce obținem,

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}); \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}); \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z})$$

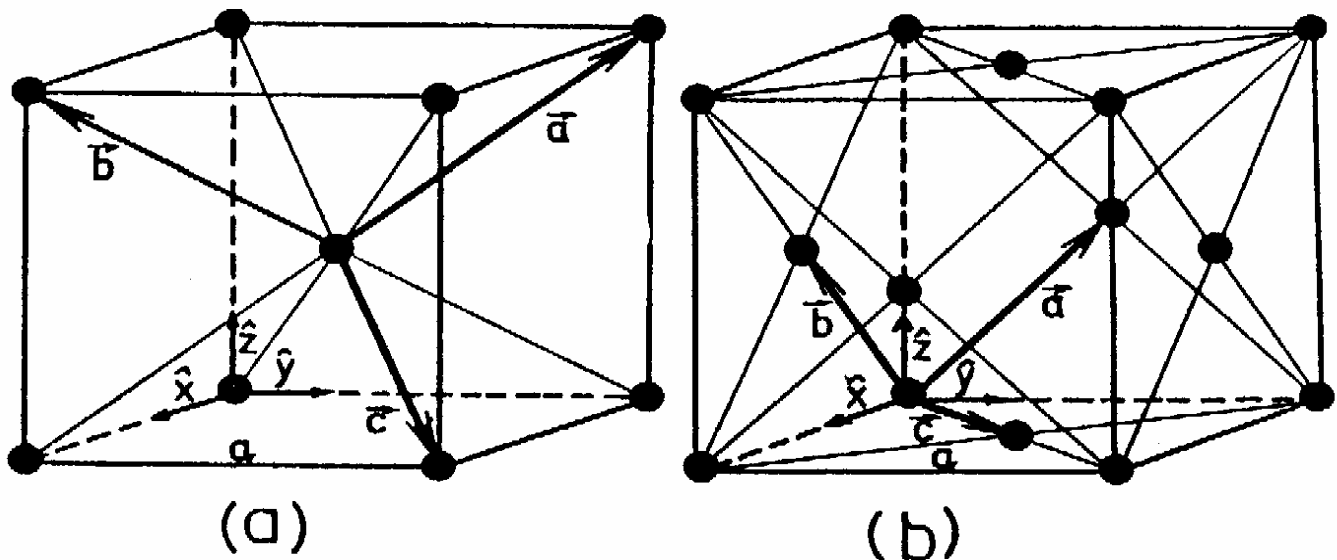


Fig.8. Alegerea vectorilor fundamentali în cazul rețelei cubice cu volum centrat (a) și în cazul rețelei cubice cu fețe centrate (b).

De aici rezultă că rețeaua reciprocă a unei rețele cubice cu fețe centrate este o rețea cubică cu volum centrat.

1.22 - Să se determine vectorii fundamentali ai rețelei reciproce pentru o rețea hexagonală simplă.

Soluție

Vectorii fundamentali \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} se aleg ca în Fig.9,

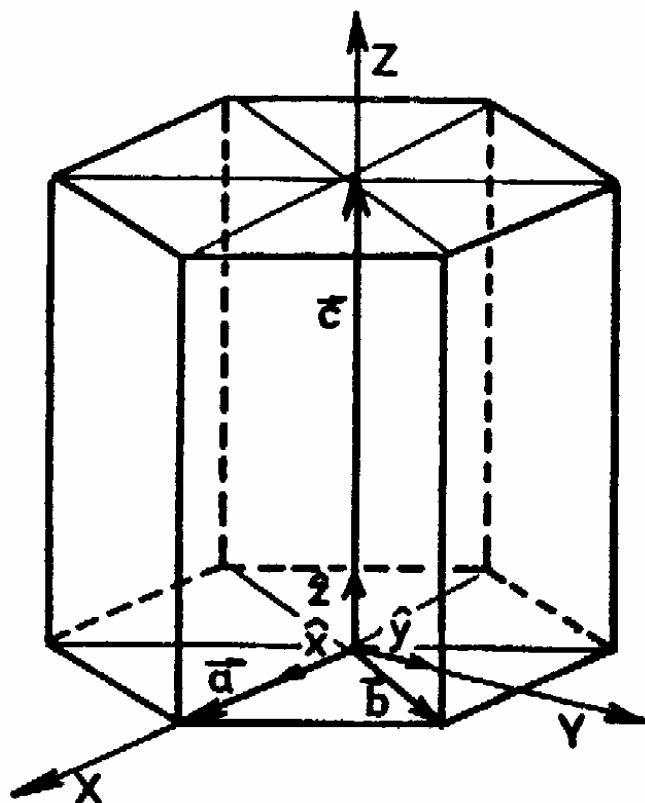


Fig.9. Alegerea vectorilor fundamentali in rețeaua hexagonală simplă.

$$\vec{a} = \vec{x} \quad , \quad \vec{b} = \frac{a}{2}(\hat{x} + \sqrt{3} \cdot \hat{y}) \quad , \quad \vec{c} = c\hat{z} \quad ;$$

unde ,

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = a \quad ; \quad \vec{c} = c\hat{z} \quad .$$

Utilizând din nou relațiile de definiție ale vectorilor rețelei reciproce cât și proprietățile versorilor \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} , pentru vectorii fundamentali ai rețelei reciproce se obține,

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} \cdot \hat{x} - \hat{y}) \quad ; \quad \vec{b}_2 = \frac{4\pi}{a\sqrt{3}} \cdot \hat{y} \quad ; \quad \vec{b}_3 = \frac{2\pi}{c} \cdot \hat{z} \quad , \text{definesc,}$$

de asemenea, o rețea hexagonală.

2. DIFRACTIA RAZELOR X PE CRISTALE

2.1- Să se determine constanta rețelei cristalului LiI dacă se știe că reflexia de ordinul 1 a razelor X cu $\lambda = 2.10 \text{ \AA}$ pe fața naturală a acestui cristal se obține sub unghiul de $10^\circ 5'$.

Soluție

Constanta rețelei la cristalul LiI este dată de formula Bragg:

$$2d \sin \vartheta = k \lambda$$

de unde:

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta} \approx 6 \text{ \AA}.$$

2.2 - Să se arate că maximele de interferență pentru o direcție de incidență dată pe o rețea cubică simplă se obțin pentru lungimi de undă perfect determinate.

Soluție

Condițiile Laue pentru maximul de interferență în cazul rețelei CS se scriu sub forma,

$$a(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = k_1 \lambda;$$

$$a(\cos \beta - \cos \beta_0) = k_2 \lambda;$$

$$a(\cos \gamma - \cos \gamma_0) = k_3 \lambda,$$

unde a este constanta rețelei, $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ și α, β, γ sunt unghiurile ce caracterizează direcția fascicului incident, respectiv direcția în care apar maximele de interferență, iar k_1, k_2, k_3 sunt ordinele maximelor. Acestor condiții li se adaugă pentru rețeaua CS și condiția,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Cele patru ecuații de mai sus pot fi satisfăcute simultan doar dacă:

$$\lambda = -2a \frac{k_1 \cos \alpha_0 + k_2 \cos \beta_0 + k_3 \cos \gamma_0}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

2.3 - Sunt observabile pe o diagramă Roentgen liniile datorate reflexiei pe planele (200) și (101) ale unei rețele CFC?

Soluție

Celula elementară CFC conține 4 atomi cu coordonatele $[[000]]$, $[[1/2^1/2^0]]$, $[[0^1/2^1/2]]$ și $[[1/2^0^1/2]]$. Factorul de structură capătă forma:

$$F_{hkl} = f(1 + \cos \pi(h+k) + \cos \pi(k+l) + \cos \pi(h+l)).$$

F_{hkl} are valoarea maximă $4f$ când cei trei indici h, k, l au aceeași paritate și se anulează în caz contrar. Deci în cazul de față doar linia (200) este observabilă.

2.4 - Să se arate că pentru determinarea coeficientului de dilatare termică

prin difracție de raze X rezultatele cele mai bune se obțin măsurând liniile cu unghiuri Bragg mari.

Soluție

Rezultatele cele mai bune se obțin atunci când unei mici variații a constantei rețelei Δd îi corespunde o variație mare a unghiului de reflexie a razelor X pe cristal. Diferențiind relația Bragg cu $\lambda = \text{const.}$, se obține:

$$d \cos \vartheta \cdot \Delta \vartheta + \sin \vartheta \cdot \Delta d = 0$$

de unde:

$$\Delta \vartheta = - \operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{\Delta d}{d}.$$

Din relația precedentă se observă că variația $\Delta \vartheta$ a unghiului ϑ la o modificare dată a parametrului rețelei cu Δd va fi maximă când $\vartheta = 90^\circ$.

2.5. La o determinare precisă a parametrilor rețelei $\beta\text{-Sn}$ (rețea tetragonală) utilizând radiația Cu α -au obținut următoarele valori pentru liniile $[503]_{\alpha 1}$ și $[271]_{\alpha 1}$: $\vartheta_{(503)} = 79.017^\circ$, $\vartheta_{(271)} = 82.564^\circ$. Se cer parametrii rețelei.

Soluție

Pentru sistemul tetragonal sunt necesare două linii pentru determinarea celor doi parametri de rețea. Utilizând expresia cunoscută pentru distanța interplanară se obține,

$$a = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{l_1^2 (h_2^2 + k_2^2) - l_2^2 (h_1^2 + k_1^2)}{l_1^2 \sin^2 \theta_2 - l_2^2 \sin^2 \theta_1}},$$
$$c = \frac{\lambda a l}{\sqrt{4 a^2 \sin^2 \theta - \lambda^2 (h^2 + k^2)}},$$

a doua relație conținând indicii oricăreia dintre cele două linii considerate. Cu datele problemei rezultă $\alpha = 5.832\text{Å}$ și $\epsilon = 3.182\text{Å}$

3. ENERGIA RETELEI

3.1- Energia de interacție a două particule depinde de distanța între centrele lor după legea:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^8},$$

unde α și β sunt constante. Să se arate că:

a) cele două particule formează o structură stabilă dacă:

$$r = r_0 = \left(\frac{8\beta}{\alpha} \right)^{1/7};$$

b) în cazul formării configurației stabile energia de atracție depășește de 8 ori pe cea de respingere;

c) energia potențială totală a celor două particule în configurația de echilibru este:

$$U_{..} = -\frac{7}{8} \left(\frac{\alpha^7}{8\beta} \right)^{1/7} = -\frac{7}{8} \frac{\alpha}{r_0};$$

d) dacă separăm particulele, molecula se va rupe îndată ce între particule se atinge distanța:

$$r = \left(\frac{36\beta}{\alpha} \right)^{1/7} = 4,5^{1/7} r_0.$$

Soluție

a) În starea de echilibru:

$$\left(\frac{dU}{dr} \right)_{r_0} = 0 \text{ adică } \frac{\alpha}{r_0^2} - \frac{8\beta}{r_0^9} = 0,$$

de unde

$$r_0 = \left(\frac{8\beta}{\alpha} \right)^{1/7}.$$

b) Energia de atracție și cea de respingere sunt, respectiv:

$$U_{at} = - \frac{\alpha}{r_0} = - \alpha \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7};$$

$$U_{resp} = \frac{\beta}{r_0^8} = \frac{\alpha}{8} \left(\frac{\alpha}{8\beta} \right)^{1/7}.$$

de unde rezultă imediat relația cerută.

c) Energia totală este dată de:

$$U = U_{at} + U_{resp} = - \frac{7}{8} \cdot \frac{\alpha}{r_0}.$$

d) Molecula se va rupe când se atinge valoarea maximă a forței de interacție între particule F_{max} . Cum:

$$F = - \frac{dU}{dr}$$

distanța cerută este dată de ecuația:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = -\frac{2\alpha}{r_{\max}^3} + \frac{72\beta}{r_{\max}^{10}} = 0,$$

de unde:

$$r = \left(\frac{36\beta}{\alpha} \right)^{1/7}.$$

3.2- Să se determine valoarea constantei lui Madelung pentru o rețea unidimensională (fig.10) formată din ioni pozitivi și negativi plasați alternativ.

Soluție

Constanta lui Madelung este dată de formula:

$$\alpha_M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)}{q_{ik}},$$

unde q_{ik} sunt factori adimensionali ce caracterizează distanța între ionii i și k folosind ca unitate constanta de rețea.



Fig. 10.

Se obține:

$$\alpha_M = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

Factorul 2 se datorează simetriei structurii la stânga și la dreapta ionului i ales drept origine. Având în vedere dezvoltarea:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

rezultă,

$$\alpha_M = 2 \ln 2 = 1,386 .$$

3.3 - Să se calculeze valoarea constantei lui Madelung pentru cristalul de tip NaCl

Soluție

Valoarea cerută se poate obține considerând succesiv grupuri de atomi astfel încât suma sarcinilor din grup să fie zero. Se consideră că sarcinile plasate pe fețe aparțin la două astfel de grupuri, cele de pe muchii la 4, iar cele din vârfuri la 8. Să considerăm atomul A (Fig.11).

Separăm sisteme neutre de sarcini, plasate pe fețele, muchiile și vârfurile cuburilor ce înconjoară sarcina considerată A. Atunci la distanța de o constantă de rețea de ionul A se află 6 sarcini pozitive situate pe fețe, la distanța $a\sqrt{2}$ sunt 12 sarcini negative pe muchiile cubului, iar la distanța $a\sqrt{3}$ sunt 8 sarcini pozitive în vârfurile cubului. Contribuția primului cub la constanta Madelung a cristalului NaCl este:

$$\alpha_{M1} = \frac{6}{1} - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = 1,45.$$

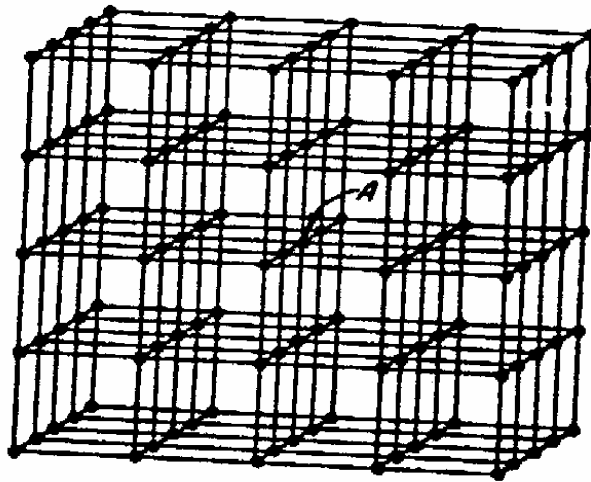


Fig.11

Să examinăm al doilea cub. Lui îi aparțin o parte din sarcinile din primul cub, cărora li se adaugă contribuția celor aflate pe frontiera sa. Cu aceleași considerații ca mai sus se obține:

$$\alpha''_M = \frac{6}{1} - \frac{3 \cdot 12}{\sqrt{2}} + \frac{7 \cdot 8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{2} + \frac{24}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{6}} - \frac{12}{\sqrt{8}} + \frac{24}{\sqrt{9}} - \frac{8}{\sqrt{12}} = 0,3.$$

Prin urmare :

$$\alpha_M = \alpha'_M + \alpha''_M = 1,75.$$

Continuând în același mod se obține valoarea mai exactă 1,747558.

3.4- Să se calculeze energia rețelei NaCl dacă exponentul ce apare în expresia potențialului repulsiv este $n=9,4$, iar constanta Madelung este 1,75.

Soluție

Energia rețelei cristaline pe o moleculă-gram este dată de:

$$U = -\frac{N_A \cdot q^2 \alpha_M}{r_0} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

unde N_A este numărul lui Avogadro, α_M este constanta lui Madelung, iar $r_0=2,81\text{\AA}$ este constanta rețelei NaCl. Se obține $U=183,7$ kcal/mol.

4. PROPRIETĂȚI TERMICE ALE CORPULUI SOLID

4.1- se considera un sistem de N molecule, care se pot afla în două stări energetice distincte separate de intervalul ΔE . Să se determine capacitatea calorică a acestui sistem.

Soluție

Numărul moleculelor excitate este dat de statistica Boltzman:

$$N_1 = N_2 e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}},$$
$$N_1 + N_2 = N,$$

unde N_1 este numărul moleculelor excitate, iar N_2 este numărul moleculelor aflate pe nivelul energetic inferior. Din relațiile de mai sus se obține:

$$N_1 = \frac{N}{1 + e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}, \quad U = N_1 \cdot \Delta E.$$

rezultă,

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{Nk_B \left(\frac{\Delta E}{k_B T} \right)^2 e^{\frac{\Delta E}{k_B T}}}{\left(1 + e^{\frac{\Delta E}{k_B T}} \right)^2}.$$

4.2- Capacitatea calorică a Ag la 10 K este 199 J/kmolK. Să se determine temperatura Debye.

Soluție

Se cunoaște expresia capacității calorice a solidelor la temperaturi joase,

$$C_V = \frac{12\pi^4 R}{5} \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 = 233,3R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3,$$

de unde $\theta=213$ K.

4.3- Să se explice de ce în solidele cu structură filiformă și stratiformă capacitatea calorică la volum constant și la temperaturi joase este proporțională cu T^1 , respectiv T^2 și nu cu T^3 .

Soluție

Capacitatea calorică a solidelor este determinată de caracteristicile spectrului de frecvențe. În spectrul Debye numărul oscilațiilor normale în intervalul de frecvențe $\nu, \nu+d\nu$ este

$$dN(\nu) \propto \nu^2 d\nu.$$

Pentru structurile stratiforme (bidimensionale) avem,

$$dN(v) \propto v dv,$$

iar pentru cele filiforme (unidimensionale),

$$dN(v) \propto dv.$$

Introducând aceste expresii în formula Debye pentru capacitatea calorică a solidelor se obține pentru rețelele bidimensionale $C_V \sim T^2$, iar pentru cele unidimensionale $C_V \sim T$.

4.4- Să se calculeze capacitatea calorică a electronilor de conducție din unitatea de volum a Cu la 100 K, considerând concentrația electronilor egală cu numărul atomilor din unitatea de volum. Se va considera $\mu_0 = 7 \text{ eV}$

Soluție

Energia totală a electronilor din unitatea de volum a metalului este:

$$E = \frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{3/2} dE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}.$$

Folosind relația,

$$\int_0^\infty \frac{\psi(E) dE}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} = \int_0^\infty \psi(E) dE + (k_B T)^2 \psi'(\mu) \frac{\pi^2}{6}.$$

și notația:

$$\frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3} E^{3/2} = Ef(E)$$

se obține:

$$\bar{E} = E_0 + (\mu - \mu_0) \mu_0 f'(\mu_0) + (k_B T)^2 \frac{\pi^2}{4} f''(\mu_0)$$

unde s-a folosit aproximația,

$$\int_0^{\mu} E f(E) dE \approx E_0 + (\mu - \mu_0) \mu_0 f(\mu_0).$$

Știind că:

$$\mu - \mu_0 = -\frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(k_B T)^2}{\mu_0},$$

și având în vedere relația,

$$f(\mu_0) = \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{\mu_0},$$

se obține,

$$\bar{E} = E_0 + \frac{\pi^2}{4} (k_B T)^2 \frac{n}{\mu_0},$$

de unde

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{k_B^2 n}{\mu_0} T.$$

Cu datele din problemă se obține $C_V = 7 \cdot 10^3 \text{ J/K.m}^3$.

5. DEFECTE ÎN CRISTALE. DIFUZIA

5.1 - Să se arate că, concentrația defectelor Frenkel într-un corp solid la temperatura T este dat de relația:

$$E = k_B T \ln \frac{(N - n)(N' - n)}{n^2},$$

unde E este energia necesară pentru crearea unui defect de tip Frenkel, N este numărul nodurilor din rețea, iar N' este numărul pozițiilor interstițiale posibile.

Soluție

Fie n numărul atomilor deplasati din nodurile rețelei la echilibru termic. Aceștia se pot plasa în interstiții în p' moduri, cu:

$$p' = \frac{N'!}{(N' - n)!n!}.$$

Golurile (nodurile vacante) se pot distribui în rețea în p moduri, cu:

$$p = \frac{N!}{(N - n)!n!}.$$

Prin urmare variațiile entropiei și a energiei interne datorate prezentei defectelor în structură sunt date de:

$$S = k_B \ln(p \cdot p') = k_B \ln \frac{N!N'!}{(N - n)!(N' - n)!(n!)^2},$$
$$U = nE,$$

și utilizând formula lui Stirling ($\ln N! = N \ln N - N$) și condiția de minim a energiei libere:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_T = \frac{\partial}{\partial n} (U - TS) \Big|_T = 0$$

se obține relația cerută. În general $n \ll N, N'$ astfel încât se poate scrie în final:

$$n \cong N \cdot e^{-\frac{E}{2k_B T}},$$

5.2 - Să se calculeze raportul concentrațiilor defectelor Schottky și Frenkel la temperatura camerei dacă energia necesară pentru crearea unei vacante este 0,75 eV, iar pentru crearea unui defect Frenkel este 3 eV.

Soluție

Vom considera pentru simplitate $N=N'$. Atunci numărul defectelor Frenkel este:

$$n_1 \cong Ne^{-\frac{E_1}{2k_B T}},$$

iar al defectelor Schottky:

$$n_2 \cong Ne^{-\frac{E_2}{k_B T}},$$

de unde:

$$\frac{n_2}{n_1} \cong e^{\frac{E_1 - 2E_2}{2k_B T}} \approx e^{30}.$$

5.3 - Să se arate că în cazul difuziei reactive creșterea stratului este descrisă de ecuația $y^2 = 2Dt$, unde y este grosimea stratului, iar D este parametrul parabolei.

Soluție

Cantitatea de substanță ce difuzează în intervalul de timp dt prin secțiunea S este:

$$dm = -D \frac{\Delta c}{y} S dt,$$

unde $\Delta c/y$ este gradientul concentrației în stratul de grosime y . Pe de altă parte admitând concentrația constantă la suprafața stratului, putem scrie că variația grosimii acestuia este proporțională cu cantitatea de substanță ce difuzează:

$$dm = aSdy ,$$

a fiind un factor de proportionalitate, legat de viteza de reactie. Deci:

$$D \frac{\Delta c}{y} dt = a dy \Rightarrow D \frac{\Delta c}{a} dt = y dy,$$

de unde:

$$D \frac{\Delta c}{a} t = \frac{y^2}{2}.$$

Notând $D\Delta c/a = p = \text{const.}$, se obține legea indicată în enunț, valabilă la o temperatură dată.

5.4 - Constantele de difuzie ale Li în Si sunt $D_0 = 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ și $Q = 0,65 \text{ eV}$.

Să se calculeze temperatura la care atomul de litiu introdus în Si va efectua un salt pe secundă.

Soluție

Frecvența de salt f este legată de coeficientul de difuzie prin relația:

$$D = \frac{d^2 f}{6} = D_0 e^{-Q/k_B T},$$

de unde se obține,

$$T = \frac{Q}{k_B \ln \frac{6D_0}{d^2 f}} = 260 \text{ K}.$$

Aici $d = 5,43 \text{ \AA}$ este constanta rețelei Si.

5.5 - Să se determine coeficientul de difuzie al Na radioactiv în Na obișnuit la temperatura camerei, dacă înălțimea barierei de potențial ce trebuie trecută de

un atom pentru a ajunge în noua poziție de echilibru este 0,5 eV. Frecvența de oscilație a atomilor este 10^{12} Hz.

Soluție

Coefficientul de difuzie este dat aproximativ de:

$$D = \nu a^2 e^{-E/k_B T},$$

unde ν este frecvența de oscilație a atomilor, iar $a=4,282$ Å este parametrul rețelei

Na. Se obține,

$$D=10^{-18} \text{ m}^2/\text{s}.$$

II. FIZICA SEMICONDUCTORILOR

6. STATISTICA ELECTRONILOR SI GOLURILOR ÎN SEMICONDUCTORI

6.1- Concentrația electronilor într-un semiconductor intrinsec la 400 K este $1,38 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Se cere produsul maselor efective ale electronilor și golurilor, dacă se știe $E_g = (0,785 - 4 \cdot 10^{-4}T) \text{ eV}$.

Soluție

Se știe că:

$$n = 2 \left(\frac{\sqrt{m_n m_p} k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\xi}{2k_B}} e^{-\frac{\Delta}{2k_B T}},$$

unde am notat $E_g = \Delta - \alpha T$. Rezultă:

$$\frac{m_n m_p}{m_0} = \left(\frac{2\pi \hbar^2}{k_B T} \right)^2 \left(\frac{n}{2} \right)^{4/3} \frac{1}{m_0^2} \exp\left(\frac{2\Delta}{3k_B T} - \frac{2\xi}{3k_B} \right) = 0,21$$

6.2- Din datele obținute la măsurarea efectului Hall pe un semiconductor rezultă că la 400 K concentrația electronilor este $1,9 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, iar la 350 K este $6,2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Se cere E_g , considerând că are o variație liniară cu temperatura.

Soluție

Notăm $E_g = \Delta = \xi T$. Atunci,

$$\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{\Delta}{2k_B} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right],$$

de unde:

$$\Delta = \frac{2k_B T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{n_1 T_2^{3/2}}{n_2 T_1^{3/2}} = 0,26 \text{ eV}.$$

6.3- Se cere $n = n(F)$, F fiind nivelul Fermi, și masa efectivă a densității de stări a electronilor de conducție în Ge și Si. Legea de dispersie în banda de conducție are forma,

$$E(\vec{k}) = E_c + \sum_{i=x,y,z} \frac{\hbar^2 (k_i - k_{0i})^2}{2m_i},$$

cu $m_i > 0$. Se știe că suprafețele izoenergetice în spațiul reciproc sunt elipsoizi de rotație, în Ge numărul minimelor echivalente este $Q=4$, $m_e=0,08152m_0$, $m_h=1,588m_0$, iar în Si $Q=6$, $m_e=0,1905m_0$, $m_h=0,9163m_0$.

Soluție

Minimele din banda de conducție fiind echivalente, concentrația este dată de,

$$n = \sum_{i=1}^Q \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{ZB_i} f(E_i^{(v)}(\vec{k})) =$$

$$= \frac{2Q}{(2\pi)^3} \int_{ZB_1} d\vec{k} \left\{ 1 + \exp \left[\frac{E_c - F + \frac{\hbar^2 (k_x - k_{0x})^2}{2m_x} + \frac{\hbar^2 (k_y - k_{0y})^2}{2m_y} + \frac{\hbar^2 (k_z - k_{0z})^2}{2m_z}}{k_B T} \right] \right\}.$$

unde am ales în spațiul reciproc ca sistem de axe sistemul propriu al unuia dintre elipsoizi. Efectuând schimbarea de variabilă:

$$k_x = \left[\frac{2m_i(E - E_c)}{\hbar^2} \right]^{1/2} \sin \theta \cos \varphi;$$

$$k_y = \left[\frac{2m_i(E - E_c)}{\hbar^2} \right]^{1/2} \sin \theta \sin \varphi;$$

$$k_z = \left[\frac{2m_i(E - E_c)}{\hbar^2} \right]^{1/2} \cos \theta,$$

se obține,

$$n = 2 \left[\frac{(Q^2 m_i^2 m_l)^{1/3} k_B T}{2\pi \hbar^2} \right]^{3/2} \Phi_{1/2} \left(\frac{F - E_c}{k_B T} \right),$$

unde:

$$\Phi_{1/2}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\varepsilon - \eta} + 1}$$

este funcția Fermi-Dirac de indice 1/2. Am introdus notațiile $\varepsilon = (E - E_c)/k_B T$ și $\eta = (F - E_c)/k_B T$. Examinând relațiile precedente rezultă că masa efectivă a densității de stări este dată de:

$$m_{dn} = (Q^2 m_i^2 m_l)^{1/3}.$$

Deci, pentru Ge $m_{dn} = 0.553 m_0$, pentru Si $m_{dn} = 1.06 m_0$.

6.4- Legea de dispersie a golurilor în banda de valență a Si și Ge se poate pune sub forma,

$$E(\vec{k}) = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \left\{ A \pm B \left[1 + 6\delta \cdot \left(\frac{k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_x^2 + k_x^2 k_z^2}{k^4} - \frac{1}{6} \right) \right]^{1/2} \right\},$$

unde,

$$B' = (B^2 + C^2 / 6)^{1/2} ; \quad \delta = C^2 / 6B'^2 .$$

A , B și C fiind parametrii de bandă. Folosind o dezvoltare în serie după δ a expresiei $E(k)$, să se estimeze masele efective ale densității de stări pentru subbanda golurilor ușoare, respectiv grele în Ge. Să se determine apoi masa efectivă a densității de stări pentru banda de valență. Se dau: $A=13,3$; $B=8,57$; $C=12,78$.

Soluție

Menținând doar termenii liniari în dezvoltarea după δ , se obține:

$$E(\vec{k}) = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\pm}} [1 \pm 3\delta B' \psi(\theta, \varphi) / (A \pm B')],$$

unde:

$$m_{\pm} = \frac{m_0}{A \pm B'};$$

$$\psi(\theta, \varphi) = \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{6}.$$

Concentrațiile de goluri pentru fiecare dintre cele două subbenzi sunt date de,

$$P_{1,2} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\pi dk \cdot k^2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta \cdot \sin\theta \left\{ 1 + \exp \left[\eta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\pm} k_B T} \left(1 \pm \frac{3\delta \cdot B'}{A \pm B'} \psi(\theta, \varphi) \right) \right] \right\}^{-1}.$$

unde indicele 1 și semnul superior se referă la subbanda golurilor ușoare, iar indicele 2 și semnul inferior la cea a golurilor grele, iar $\eta = (E_v - E_f) / k_B T$.

Dezvoltând mai departe integrandul după,

$$\frac{3\delta \cdot B'}{A \pm B'} \psi(\theta, \varphi) \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\pm} k_B T}$$

și efectuând calculele rezultă,

$$P_{1,2} = 2 \left(\frac{m_{\pm} k_B T}{2\pi \cdot \hbar^2} \right)^{3/2} \left[1 \mp \frac{3\delta \cdot B'}{20(A \pm B')} \right] \Phi_{1/2}(\eta) = 2 \left(\frac{m_{\phi 1,2} k_B T}{2\pi \cdot \hbar^2} \right)^{3/2} \Phi_{1/2}(\eta).$$

unde $F_{1/2}(\eta)$ este funcția Fermi-Dirac de indice 1/2.

Prin urmare, având în vedere relația precedentă, expresiile căutate sunt, după o ultimă dezvoltare după δ ,

$$m_{dp1,2} = m_{\pm} \left[1 \mp \frac{\delta \cdot B'}{10(A \pm B')} \right].$$

Deci masa efectivă a densității de stări în banda de valență este dată de,

$$m_{dp} = \left(m_{dp1}^{3/2} + m_{dp2}^{3/2} \right)^{2/3}.$$

Pentru Ge $m_{dp1} = 0,042m_0$; $m_{dp2} = 0,33m_0$; $m_{dp} = 0,36m_0$.

6.5- În banda de conducție a GaAs pe lângă minimul principal (1) din centrul zonei Brillouin există minime relative plasate cu E_2 mai sus decât primul. (Fig.12). Să se studieze dependența nivelului Fermi de concentrație într-un asemenea semiconductor în cazurile degenerat, respectiv nedegenerat. Influența celorlalte benzi se va neglija.

Soluție

Concentrația totală a electronilor este dată de,

$$n = n_1 + n_2 = \frac{2}{(2\pi)^3} \int f(E_1(\vec{k})) d\vec{k} + \frac{2}{(2\pi)^3} \int f(E_2(\vec{k})) d\vec{k};$$

$$E_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1}, \quad E_2(\vec{k}) = E_s + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2},$$

unde am ales E_c ca nivel de referință pentru energie. Introducând expresiile cunoscute pentru funcția de distribuție și efectuând calculele se obține:

Cazul semiconductorului nedegenerat,

$$n = N_1 \Phi_{1/2}(\eta) + N_2 \Phi_{1/2}\left(\eta - \frac{E_s}{k_B T}\right),$$

$$N_{1,2} = 2 \left(\frac{m_{1,2} k_B T}{2\pi \cdot \hbar^2} \right)^{3/2}.$$

Cazul semiconductorului degenerat,

$$n = N \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \eta^{3/2} + N \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\eta - \frac{E_s}{k_B T} \right)^{3/2} \Theta(F - E_s).$$

Am folosit notația $\eta = F/k_B T$, iar $\Theta(F - E_s)$ este funcția Heaviside.

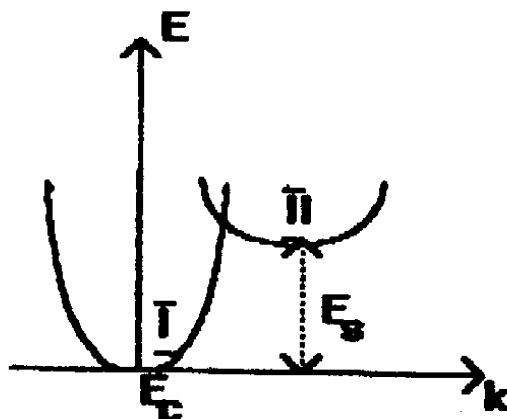


Fig.12

6.6- Să se determine dependența de temperatură a populației minimelor superioare ale GaAs în cazul nedegenerat. Cât este raportul concentrațiilor

n_2/n_1 la 300 K și la 1000 K? Se dau $m_2=15m_1$, $E_s=0,35$ eV, iar concentrația totală a electronilor se consideră independentă de temperatură.

Soluție

Din soluția problemei precedente știm că:

$$n_2 = N_2 \exp\left(\eta - \frac{E_s}{k_B T}\right); \quad n_1 = N_1 \exp(\eta);$$

$$\exp(\eta) = \frac{n}{N_1 + N_2 \exp\left(-\frac{E_s}{k_B T}\right)}, \quad n = n_1 + n_2.$$

Atunci,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{N_2}{N_1} \exp\left(-\frac{E_s}{k_B T}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_s}{k_B T}\right)$$

și

$$n_2/n_1(300 \text{ K})=0,8 \cdot 10^{-4}, \quad n_2/n_1(1000 \text{ K})=1.$$

6.7- Să se calculeze densitatea de stări și masa efectivă a densității de stări în banda de conducție pentru o lege de dispersie de tipul,

$$E(\vec{k}) = E_c + \frac{1}{2} \left(\sqrt{E_s^2 + \frac{2\hbar^2 k^2 E_s}{m(0)}} - E_s \right)$$

Să se examineze cazurile unui gaz electronic nedegenerat, respectiv degenerat. În ultimul caz să se găsească dependența $n=n(F)$.

Soluție

Avem,

$$n = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{ZB} d\vec{k} \cdot f(E(\vec{k})) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dE \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Z(E, \theta, \varphi) f(E),$$

unde am efectuat schimbarea de variabilă,

$$k_x, k_y, k_z \rightarrow E, \theta, \varphi$$

E fiind energia (direct legată de k) măsurată de la E_c , θ și φ unghiurile polare relativ la sistemul de coordonate din spațiul reciproc, iar $Z(E, \theta, \varphi)$ iacobianul transformării. Analizând relația precedentă rezultă imediat densitatea de stări,

$$\rho(E) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \cdot Z(E, \theta, \varphi),$$

cu,

$$Z(E, \theta, \varphi) = k^2 \left| \frac{dk}{dE} \right| \sin \theta.$$

De aici,

$$\rho(E) = \frac{[2m(0)]^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} E^{1/2} \left(1 + \frac{E}{E_g} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{2E}{E_g} \right)$$

Cazul semiconductorului nedegenerat,

$$f(E) = \exp\left(\frac{F - E}{k_B \cdot T}\right);$$

$$n = \int_0^\infty \rho(E) \exp\left(\eta - \frac{E}{k_B \cdot T}\right) dE = N_c \cdot e^\eta,$$

unde,

$$N_c = 2 \frac{[2m(0)k_B T]^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{k_B T}{E_g}\right)^{3/2} \int_0^\infty \xi^{1/2} \left(\xi + \frac{E_g}{k_B \cdot T}\right)^{1/2} \left(\xi + \frac{E_g}{2k_B \cdot T}\right) e^{-\xi} d\xi,$$

$$\xi = \frac{E}{k_B \cdot T}; \quad \eta = \frac{F}{k_B \cdot T}.$$

Cazul semiconductorului degenerat,

$$n = \int_0^\infty dE \cdot \rho(E) = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{2m(0)}{\hbar^2} \right]^{3/2} F^{3/2} \left(1 + \frac{F}{E_g} \right)^{3/2}.$$

O lege de dispersie de tipul celei indicate în enunț este caracteristică semiconductorilor cu bandă interzisă îngustă, de tipul InSb. Aici $m(0)$ este un parametru de bandă (masa efectivă în vecinătatea limitei benzii).

6.8- Să se găsească temperatura la care nivelul Fermi coincide cu nivelul impurității donoare în Ge dopat cu Sb. Se dau $N_d = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, nivelul Sb este dat de $E_d = E_c - 0,01 \text{ eV}$, iar degenerarea $g_d = 2$. Care este concentrația electronilor la această temperatură?

Soluție

Nivelul Fermi este dat de ecuația de neutralitate electrică:

$$p - n + N_d^+ = 0, \quad p \ll n \Rightarrow n = N_d^+.$$

Avem,

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + g_d \exp\left(\frac{F - E_d}{k_B \cdot T}\right)},$$

deci,

$$N_c \cdot e^n = \frac{N_d}{1 + g_d \cdot e^n \cdot \exp\left(\frac{E_c - E_d}{k_B \cdot T}\right)}$$

$$e^n = \frac{1}{2g_d} \exp\left(\frac{E_d - E_c}{k_B \cdot T}\right) \left[\sqrt{1 + 4g_d \frac{N_d}{N_c} \exp\left(\frac{E_c - E_d}{k_B \cdot T}\right)} - 1 \right].$$

unde s-a notat $h=(F-E_c)/k_B T$. Introducând $F=E_d$ în relația precedentă se obține temperatura căutată T_1 ,

$$k_B \cdot T_1 = \frac{E_c - E_d}{\ln \left[\frac{(g_d + 1) N_c(T_1)}{N_d} \right]}$$

Cu notațiile,

$$k_B \cdot T_0 = E_c - E_d; \quad y = \frac{T_0}{T_1},$$

rezultă următoarea ecuație,

$$y = \ln \left[\frac{(g_d + 1) N_c(T_0)}{N_d} \right] - \frac{3}{2} \ln(y),$$

a cărei soluție pentru valorile indicate în enunț este $y=4,4$, adică $T_1=26,2$ K.

Concentrația este dată de,

$$n = N_c(T_0) y^{-3/2} \exp(-y) = 3,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}.$$

6.9- Să se găsească intervalul de temperatură în care concentrația electronilor este constantă și egală cu concentrația donoilor în Ge care conține $2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ donori cu nivelul energetic $E_d = E_c - 0,01 \text{ eV}$. Se dau $E_g = (0,785 - 4 \cdot 10^{-4} T) \text{ eV}$, $g_d = 2$.

Soluție

Din condiția de neutralitate,

$$n = N_d^+$$

și,

$$n = N_c \cdot e^{\eta}$$

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + g_d \cdot e^{\eta} \cdot \exp\left(\frac{E_c - E_d}{k_B \cdot T}\right)} = \frac{N_d}{1 + \frac{g_d \cdot n}{N_c} \exp\left(\frac{E_c - E_d}{k_B \cdot T}\right)},$$

se obține (s-a considerat semiconductorul ca fiind nedegenerat),

$$n = \frac{n_d}{2g_d} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4g_d \cdot N_d}{n_d}} \right).$$

În relația precedentă s-a introdus notația,

$$n_d = N_c \exp\left(\frac{E_d - E_c}{k_B \cdot T}\right).$$

Se observă din expresia pentru n că, pentru a obține $n = N_d$, trebuie ca $n_d \gg 4g_d N_d$. Atunci limita inferioară a intervalului cerut este dată de condiția,

$$n_d = 4g_d N_d \Rightarrow N_c(T_1) \exp\left(\frac{E_d - E_c}{k_B \cdot T_1}\right) = 4g_d \cdot N_d;$$

$$\frac{E_d - E_c}{k_B \cdot T_0} \cdot \frac{T_0}{T_1} = \ln\left(\frac{4g_d \cdot N_d}{N_c(T_0)}\right) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right).$$

Limita superioară este dată de $n \ll n$ (pentru a putea neglija concentrația de goluri în condiția de neutralitate), adică,

$$N_d = n_i = N_c(T_2) \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B \cdot T_2}\right).$$

Cu valorile din enunț se obțin: $T_1=35$ K, $T_2=400$ K. Prin urmare la temperatura camerei putem considera cu o bună aproximație $n=N_d$.

6.10- Să se determine dependența de temperatură a concentrației purtătorilor de sarcină într-o probă parțial compensată ($N_d > N_a$) în domeniul de epuizare a impurităților, în cazul nedegenerat. Care este energia de activare, determinată din panta $\ln(n) = f(1/T)$ la temperaturi joase?

Soluție

Condiția de neutralitate electrică se scrie,

$$n + N_a^- = p + N_d^+; \quad p = \frac{n_i}{n}.$$

Având în vedere poziția nivelului Fermi putem considera $N_a = N_a^-$ și,

$$N_d^+ = \frac{N_d}{1 + g_d \exp(\eta) \exp\left(\frac{E_c - E_d}{k_B \cdot T}\right)};$$

$$n = N_c \cdot e^\eta; \quad n_d = N_c \exp\left(\frac{E_d - E_c}{k_B \cdot T}\right),$$

cu $\eta = (F - E_c) / k_B T$.

Atunci,

$$n + N_a = \frac{N_d}{1 + g_d \cdot \frac{n}{N_c} \exp\left(\frac{E_c - E_d}{k_B \cdot T}\right)} = \frac{N_d}{1 + g_d \frac{n}{n_d}} \Rightarrow$$

$$\frac{g_d}{n_d} n^2 + \left(1 + g_d \frac{N_a}{n_d}\right) n - (N_d - N_a) = 0,$$

cu soluția,

$$n = \frac{1}{2g_d} \left[\sqrt{(n_d + g_d N_a)^2 + 4g_d \cdot (N_d - N_a)n_d} - (n_d + g_d \cdot N_a) \right]$$

La temperaturi joase $n_d \ll N_a$ și deci deci,

$$n = \frac{N_c}{g_d} \left(\frac{N_d}{N_a} - 1 \right) \exp\left(\frac{E_d - E_c}{k_B \cdot T} \right)$$

Energia de activare cerută este deci $E_c - E_d$

La temperaturi înalte ($n_d \gg N_a$) vom avea,

$$n = \frac{n_d}{2g_d} \left(\sqrt{1 + 4g_d \frac{N_d - N_a}{n_d}} - 1 \right) \cong N_d - N_a.$$

6.11- Să se determine intervalul de temperatură în care concentrația electronilor într-un semiconductor parțial compensat ($N_d > N_a$) este constantă și egală cu $N_d - N_a$. Să se estimeze capetele acestui interval pentru Si dacă $E_d = E_c - 0,05$ eV, $N_d = 2 \cdot 10^{15}$ cm⁻³, $N_a = 1,2 \cdot 10^{15}$ cm⁻³. Se dau $m_{dn} = 1,1 m_0$, $E_g = (1,21 - 2,8 \cdot 10^{-4} T)$ eV, iar degenerarea $g_d = 2$.

Soluție

Am văzut în problema precedentă că la temperaturi joase $n_d \ll N_a$ și deci,

$$n = \frac{N_c}{g_d} \left(\frac{N_d}{N_a} - 1 \right) \exp\left(\frac{E_d - E_c}{k_B \cdot T} \right)$$

Limita inferioară a intervalului cerut este dată de ecuația $n = N_d - N_a$, care având în vedere expresia precedentă și dependența de temperatură a lui N_c , capătă forma,

$$\frac{E_c - E_d}{k_B \cdot T_0} y = \ln \left(\frac{g_d \cdot N_a}{N_c(T_0)} \right) + \frac{3}{2} \ln y,$$

unde s-au folosit notațiile,

$$y = \frac{T_0}{T_1}; \quad T_0 = \frac{E_c - E_d}{k_B}.$$

Limita superioară este dată de condiția,

$$n = N_d - N_a = n_i = N_c(T_2) \exp \left(-\frac{E_g}{2k_B \cdot T_2} \right).$$

Cu valorile indicate în enunț, pentru Si se obține $T_1 = 79$ K, $T_2 = 542$ K.

6.12- Un semiconductor conține defecte, de concentrație N și cu energie de corelație negativă. Să se studieze dependența nivelului Fermi de temperatură și concentrația impurităților puțin adânci. Se va considera $U_0 \gg k_B T$, U_0 fiind valoarea absolută a energiei de corelație.

Soluție

La energii finite de interacție a electronilor aflați pe același centru local, pot apare stări ce permit localizarea a 2 sau mai mulți electroni pe centru. În acest caz variația energiei E_j la adăugarea electronului j pe centru depinde de j . Energia centrului după adăugarea a j electroni, $E^{(j)}$, este dată de,

$$E^{(j)} = E_1 + E_2 + \dots + E_j.$$

Gradele de ocupare a centrilor sunt descrise de ecuațiile,

$$\frac{N_j}{N_{j-1}} = \frac{g_j}{g_{j-1}} \exp \left(\frac{F - E_j}{k_B \cdot T} \right) = \frac{g_j}{g_{j-1}} \exp \left(\frac{F - E_1 - U_j}{k_B \cdot T} \right),$$

unde N_j desemnează concentrația centrilor ce conțin j electroni, g_j este gradul de degenerare al stării, $U_j = E_j - E_1$ este energia de interacție a electronului j cu ceilalți ($j-1$) de pe centru (energia de corelație). În particular, pentru un centru ce poate conține 0, 1 sau 2 electroni relațiile precedente se scriu,

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{g_1}{g_0} \exp\left(\frac{F - E_1}{k_B \cdot T}\right); \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(\frac{F - E_1 - U}{k_B \cdot T}\right),$$

concentrația totală a centrilor de tipul examinat fiind $N = N_0 + N_1 + N_2$.

Relațiile precedente sunt valabile atât pentru energii de corelație pozitive, datorate potențialului coulombian de respingere a electronilor, cât și pentru $U = U_0 < 0$, fapt ce pune în evidență un caracter atractiv al interacției electronilor de pe centru, posibil datorită evoluției energiei de legătură chimică sau energiei de polarizare a mediului înconjurător la localizarea pe centru a mai mult de un electron.

Revenind la problema dată,

$$E_2 = E_1 + U = E_1 - U_0; \quad U = -U_0 < 0;$$

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{g_1}{g_0} \exp\left(\frac{F - E_1}{k_B \cdot T}\right);$$

$$\frac{N_2}{N_0} = \frac{g_2}{g_0} \exp\left(\frac{2F - 2E_1 + U_0}{k_B \cdot T}\right).$$

Condiția de neutralitate se scrie (considerăm, pentru precizare, nivele puțin adânci de tip donator cu concentrația N_d și de tip acceptor cu concentrația N_a),

$$N_d = N_a + N_1 + 2N_2$$

Stările de sarcină considerate pentru defectele de tip acceptor sunt,

- 0: nivel ocupat cu 1 electron;
- q: centrul primește 1 electron;
- 2q: centrul primește 2 electroni.

Având în vedere relațiile de mai sus rezultă că,

$$\frac{N_d - N_a}{N} = \frac{g_1 \exp\left(\frac{F - E_1}{k_B \cdot T}\right) + 2g_2 \exp\left(\frac{2F - 2E_1 + U_0}{k_B \cdot T}\right)}{g_0 + g_1 \exp\left(\frac{F - E_1}{k_B \cdot T}\right) + g_2 \exp\left(\frac{2F - 2E_1 + U_0}{k_B \cdot T}\right)}$$

$$y = \frac{g_1 \cdot x + 2g_2 \exp\left(\frac{U_0}{k_B \cdot T}\right) x^2}{g_0 + g_1 \cdot x + g_2 \exp\left(\frac{U_0}{k_B \cdot T}\right) x^2}$$

unde s-a notat,

$$x = \exp\left(\frac{F - E_1}{k_B \cdot T}\right);$$

$$y = \frac{N_d - N_a}{N}.$$

Tinând cont și de $U_0 \gg k_B T$, termenul 2 din ecuația pentru x este neglijabil față de primul și deci,

$$(2-y)g_2 \exp\left(\frac{U_0}{k_B \cdot T}\right) x^2 - g_0 \cdot y = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{g_0 \cdot y}{g_2 \cdot (2-y)}} \exp\left(-\frac{U_0}{2k_B \cdot T}\right)$$

Se obține deci o dependență slabă de concentrațiile N_d , N_a în domeniul unde nivelele de impuritate joacă un rol preponderent.

7. RECOMBINAREA PURTĂTORILOR DE SARCINĂ ÎN SEMICONDUCTORI

7.1- La momentul $t_1=10^{-4}$ s după întreruperea generării omogene de perechi electron-gol concentrația de neechilibru a purtătorilor de sarcină s-a dovedit a fi de 10 ori mai mare decât la momentul $t_2=10^{-8}$ s. Să se determine timpul de viață τ , dacă nivelul de excitare este mic și recombinarea se face pe defecte simple.

Soluție

Relaxarea concentrației purtătorilor de neechilibru este descrisă de ecuația,

$$\frac{d\Delta p}{dt} = -r_p = -\frac{\Delta p}{\tau},$$

de unde,

$$\Delta p(t) = \Delta p(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right);$$

$$\frac{\Delta p(t_1)}{\Delta p(t_2)} = \exp\left(\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right) \Rightarrow \tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(\frac{\Delta p(t_1)}{\Delta p(t_2)}\right)} \cong 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

7.2- Să se determine legea de variație cu timpul a concentrației purtătorilor de sarcină într-un material de tip n, dacă după înlăturarea sursei de generare rata de recombinare este $r = a(np - n_i^2)$, a fiind o constantă.

Soluție

Considerăm $\Delta p = \Delta n$ și fie n_0 și p_0 concentrațiile de echilibru ale electronilor, respectiv ale gurilor. Viteza de recombinare este dată de relația:

$$-r = \frac{d\Delta p}{dt} = -a \left[\left(\frac{n_i^2}{n_0} + \Delta p \right) (n_0 + \Delta p) - n_i^2 \right] = -a [(\Delta p)^2 + n_0 \Delta p],$$

unde am avut în vedere că $n_0 p_0 = n_i^2$ și $n_0 \gg p_0$. Integrând ecuația precedentă cu condiția inițială $\Delta p = \Delta p(0)$ la $t=0$ se obține,

$$\Delta p(t) = \frac{n_0 \Delta p(0)}{[n_0 + \Delta p(0)] \exp(n_0 a t) - \Delta p(0)}$$

7.3. În probe de Ge cu diferite concentrații n_0 și p_0 există centri de recombinare simpli cu $N_t = 2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. La 300 K în n-Ge monopolar timpul de viață este $\tau_1 = 8 \text{ ms}$, la $p_{02} = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ timpul de viață este $\tau_2 = 26 \text{ ms}$, iar τ_{max} a fost determinat a fi 91 ms. Să se determine coeficienții și secțiunile de captură ai purtătorilor și nivelul centrului E_p , considerându-l plasat în jumătatea inferioară a benzii interzise.

Soluție

Stim că,

$$r = N_t \frac{\alpha_n \cdot \alpha_p \cdot (pn - n_i^2)}{\alpha_n (n + n_1) + \alpha_p (p + p_1)} = \frac{\Delta n}{\tau},$$

unde,

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \Delta n; \quad p = p_0 + \Delta p; \\ n_1 &= g_i^{-1} N_0 \exp\left(\frac{E_i - E_c}{k_B \cdot T}\right); \quad p_1 = g_i^{-1} N_0 \exp\left(\frac{E_v - E_i}{k_B \cdot T}\right); \\ \tau &= \frac{\tau_{n0}(p_0 + p_1 + \Delta n) + \tau_{p0}(n_0 + n_1 + \Delta n)}{n_0 + p_0 + \Delta n}; \\ \tau_{n0} &= \frac{1}{N_t \cdot \alpha_n}; \quad \tau_{p0} = \frac{1}{N_t \cdot \alpha_p}. \end{aligned}$$

Relațiile precedente arată că la abateri mici de la echilibru timpul de viață este maxim dacă $n_0 = n_1$. În condițiile date,

$$\tau_{\max} = \frac{\tau_{n0} \cdot p_1}{2n_1}.$$

Apoi,

$$\tau_2 = \tau_{n0} \frac{p_1 + p_{02}}{p_{02}}.$$

De aici rezultă ușor p_1 și în consecință pentru E_i se obține,

$$p_1 = \frac{p_{02}}{\frac{p_{02} \cdot \tau_2}{2n_1 \cdot \tau_{\max}} - 1} = 1,3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3};$$

$$E_i - E_v = k_B \cdot T \ln \frac{N_v}{p_1} = 0,26 \text{ eV}.$$

Mai departe,

$$\alpha_n = \frac{1}{N_t \cdot \tau_{n0}} = \frac{P_1}{2N_t \cdot \tau_{max} \cdot n_1} = 4,4 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1};$$

$$\alpha_p = \frac{1}{N_t \cdot \tau_1} = 6,2 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1};$$

$$S_n = \frac{\alpha_n}{v_T} = 3,8 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2;$$

$$S_p = \frac{\alpha_p}{v_T} = 5,3 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2.$$

7.4- Într-un semiconductor s-au introdus acceptori cu concentrația $N_a = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Nivelul lor este plasat în vecinătatea mijlocului benzii interzise. Raportul secțiunilor de captură este $S_p/S_n = 100$. Apoi se introduc donori cu nivele puțin adânci cu $N_d = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. La o temperatură joasă proba este iluminată cu o radiație ce generează $g = 10^{19} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ perechi de purtători uniform în volum. Se dă $\tau_n = 10 \text{ ns}$. Se cer τ_p , Δp , Δn și coeficienții de captură α_n și α_p .

Soluție

La temperaturi joase nivelele adânci ale acceptorilor sunt ocupate doar ca rezultat al compensării donorilor:

$$N_d = N_a^- = 10^{15} \text{ cm}^{-3}; \quad N_a^0 = N_a - N_a^- = 9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}.$$

Se verifică deci inegalitățile,

$$N_a^0, N_a^- \gg n_0, p_0, n_1, p_1,$$

de aceea, considerând nivel slab de injecție ($\Delta n, \Delta p \ll N_a^-$), avem,

$$\tau_n = \frac{1}{\alpha_n \cdot N_a^0}; \quad \tau_p = \frac{1}{\alpha_p N_a^-};$$

$$\Delta n = g\tau_n = 10^{14} \text{ cm}^{-3}, \quad \Delta p = \Delta n \frac{\tau_p}{\tau_n} = \Delta n \frac{S_n \cdot N_a^0}{S_p \cdot N_a^-} = 9 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3};$$

$$\tau_p = \tau_n \frac{\Delta p}{\Delta n} = 0,9 \text{ } \mu\text{s};$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\tau_n \cdot N_a^0} = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}; \quad \alpha_p = \alpha_n \frac{S_p}{S_n} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}.$$

7.5-La măsurarea timpului de viață al purtătorilor de neechilibru în p-Ge s-a obținut că în intervalul de la temperatura camerei până la $T=120 \text{ K}$, dependența timpului de viață de temperatură are forma,

$$\tau = \left[8,1 + 6,2 \tanh \left(4,41 - \frac{955}{T} \right) \right] \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Se știe că recombinarea se face cu participarea centrilor ce dau 2 nivele, anume E_1 în jumătatea inferioară a benzii interzise și E_2 în cea superioară. Considerând că în intervalul de temperatură examinat coeficienții de captură ai electronilor (α_{n1} și α_{n2}) și A_0 rămân constante, să se determine aceste mărimi. Se dau $N_t = 2 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, $N_v = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ (se va neglija dependența de temperatură a lui N_v). Să se determine secțiunea de captură a electronilor la 200 K și E_1 .

Soluție

În cazul centrilor de captură cu 2 nivele locale E_1 și E_2 și la abateri mici de la echilibru timpul de viață al purtătorilor este dat de expresia,

$$\frac{1}{\tau} = N_1 \frac{1 + \frac{n_0}{P_0}}{1 + \frac{P_1}{P_0} + \frac{P_1 P_2}{P_0^2}} \left[\frac{1}{\alpha_{n_1}} + \frac{1}{\alpha_{p_1} \cdot P_0} + \frac{\frac{P_1}{P_0}}{\frac{1}{\alpha_{n_2}} + \frac{1}{\alpha_{p_2} \cdot P_0}} \right]$$

în care cel de-al doilea indice la coeficienții de captură indică nivelul pe care este localizat electronul, iar n_1, n_2, p_1, p_2 sunt definiți prin relații identice cu cele întâlnite la centrul cu un singur nivel, cu înlocuirea E_i cu E_1 , respectiv E_2 . Pentru pozițiile indicate în enunț ale nivelelor E_1, E_2 și nivelului Fermi putem considera că,

$$\frac{n_0}{P_0} \ll 1; \quad \frac{n_1}{P_0} \ll 1; \quad \frac{P_2}{P_0} \ll 1.$$

Deci expresia pentru τ se reduce la,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{N_1}{1 + \frac{P_1}{P_0}} \left(\alpha_{n_1} + \frac{\alpha_{n_2} \frac{P_1}{P_0}}{1 + \frac{\alpha_{n_2} \cdot n_2}{\alpha_{p_2} \cdot P_0}} \right).$$

Comparând această formulă cu cea empirică, concluzionăm că palierul din domeniul temperaturilor înalte care apare în experiență este posibil doar dacă,

$$\frac{\alpha_{n_2} \cdot n_2}{\alpha_{p_2} \cdot P_0} \ll 1.$$

În aceste condiții se obține,

$$\tau = \frac{p_0 + p_1}{N_i \cdot (\alpha_{n1} \cdot p_0 + \alpha_{n2} \cdot p_1)}$$

Cum,

$$p_1 = N_v \exp\left(\frac{E_v - E_1}{k_B \cdot T}\right) \Rightarrow$$

$$2N_i \cdot \tau = (\alpha_{n1}^{-1} + \alpha_{n2}^{-1}) - (\alpha_{n2}^{-1} - \alpha_{n1}^{-1}) \tanh\left(\frac{E_1 - E_v}{2k_B \cdot T} + \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha_{n1} \cdot p_0}{\alpha_{n2} \cdot N_v}\right)$$

Formula empirică are aceeași formă,

$$2N_i \cdot \tau = A - B \tanh\left(\frac{T_0}{T} - C\right),$$

cu $A=3,24 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}$, $B=2,47 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}$, $T_0=955 \text{ K}$, $C=4,41$. De aici rezultă,

$$\alpha_{n1} = \frac{2}{A-B} = 2,64 \cdot 10^8 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}; \quad \alpha_{n2} = \frac{2}{A+B} = 3,5 \cdot 10^9 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1};$$

$$p_0 = N_v \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{n1}} \exp(-2C) = 2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}; \quad E_1 = E_v + 2k_B \cdot T = E_v + 0,17 \text{ eV};$$

$$v_T = \left(\frac{3k_B \cdot T}{m_0}\right)^{1/2} = 0,96 \cdot 10^7 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}; \quad S_{n1} = \frac{\alpha_{n1}}{v_T} \cong 2,8 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2;$$

$$S_{n2} \cong 3,7 \cdot 10^{16} \text{ cm}^2.$$

7.6- Să se arate cum depinde de temperatură concentrația purtătorilor de sarcină suplimentari într-un semiconductor de tip n, după încetarea generării staționare care a indus o abatere slabă de la echilibru. Se vor

considera cunoscuți timpul de recombinare τ_r , timpul de captură pe nivelul cu afinitate pentru goluri τ_1 și timpul de reemisie τ_2 .

Soluție

Ecuțiile de continuitate în acest caz vor avea forma,

$$\frac{d\Delta n}{dt} = g - \frac{\Delta p}{\tau_r};$$
$$\frac{d\Delta p}{dt} = g - \frac{\Delta p}{\tau_r} - \frac{\Delta p}{\tau_1} + \frac{\Delta p_1}{\tau_2}; \Delta p_1 = \Delta n - \Delta p.$$

În cazul staționar avem,

$$\Delta p = g\tau_r; \Delta p_1 = \Delta p \frac{\tau_2}{\tau_1}; \Delta n = \Delta p \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right).$$

În procesul de relaxare Δn și Δp pot fi descrise ca niște combinații liniare a două funcții exponențiale de timp,

$$\Delta n = A \exp(-k_1 \cdot t) + B \exp(-k_2 \cdot t);$$
$$\Delta p = C \exp(-k_1 \cdot t) + D \exp(-k_2 \cdot t),$$

Diferențind a doua ecuație de continuitate și utilizând-o pe prima, se obține:

$$k^2 - \frac{1}{\tau_g} k + \frac{1}{\tau_2 \cdot \tau_r} = 0,$$

unde,

$$\frac{1}{\tau_g} = \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}.$$

Se obțin soluțiile,

$$k_{1,2} = \frac{1}{2\tau_g} \pm \left[\frac{1}{4\tau_g^2} - \frac{1}{\tau_r \cdot \tau_2} \right]^{1/2}.$$

Utilizând și condițiile inițiale (cele referitoare la cazul staționar) rezultă în final,

$$\Delta n = \frac{g\tau_r}{k_1 - k_2} \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \left\{ \left[\frac{1}{\tau_r} - k_2 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \right] \exp(-k_1 \cdot t) + \left[k_1 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) - \frac{1}{\tau_r} \right] \exp(-k_2 \cdot t) \right\};$$

$$\Delta p = \frac{g\tau_r^2}{k_1 - k_2} \left\{ k_1 \left[\frac{1}{\tau_r} - k_2 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \right] \exp(-k_1 \cdot t) + k_2 \left[k_1 \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) - \frac{1}{\tau_r} \right] \exp(-k_2 \cdot t) \right\}.$$

7.7- În condițiile descrise în problema precedentă să se determine variația relativă a conductivității în n-Ge cu $n_0 = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, la generare staționară $g = 10^{19} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ și să se studieze cantitativ caracterul relaxării ei, dacă $\tau_r = 2 \text{ ns}$, $\tau_1 = 5 \text{ ns}$, $\tau_2 = 50 \text{ ns}$.

Soluție

În cazul staționar $\Delta p = g\tau_r = 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $\Delta n = \Delta p (1 + \tau_2/\tau_1) = 2,2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Apoi,

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = \frac{\mu_p \cdot \Delta p + \mu_n \cdot \Delta n}{n_0 \cdot \mu_n} = \frac{\Delta p}{n_0 b} \left[1 + b \left(1 + \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \right] = 0,046; \quad b = \frac{\mu_n}{\mu_p}.$$

Relațiile pentru $k_{1,2}$ din problema precedentă dau $k_1 = 5,02 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$, $k_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$.

Se obțin,

$$\Delta n = 2,2 \cdot 10^{14} [0,58 \exp(-k_1 \cdot t) + 10,42 \exp(-k_2 \cdot t)] \text{ cm}^{-3};$$

$$\Delta p = 2 \cdot 10^{13} [0,58 \exp(-k_1 \cdot t) + 0,42 \exp(-k_2 \cdot t)] \text{ cm}^{-3}.$$

Pentru $(k_1)^{-1} = \tau_r$ apare o mică componentă a conductivității "rapide" de neechilibru.

8. DIFUZIA ȘI DRIFTUL PURTĂTORILOR DE SARCINĂ

8.1- Să se calculeze lungimea de difuzie a electronilor în Ge nedegenerat la 300 K, dacă timpul de viață al electronilor este: a) $\tau_n = 10^{-4}$ s; b) $\tau_n = 10^{-6}$ s. Se dă $\mu_n = 3800 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$.

Soluție

Lungimea de difuzie este dată de,

$$L_n = \sqrt{D_n \cdot \tau_n},$$

unde D_n este coeficientul de difuzie, iar τ_n este timpul de viață al electronilor. Se cunoaște relația lui Einstein, valabilă pentru gazul electronic nedegenerat,

$$D_n = \frac{k_B \cdot T}{q} \mu_n.$$

Prin urmare,

$$L_n = \sqrt{\mu_n \cdot \tau_n \frac{k_B \cdot T}{q}} \Rightarrow \text{a) } L_n = 0,1 \text{ cm; b) } L_n = 0,01 \text{ cm.}$$

8.2- Să se calculeze coeficientul de difuzie al electronilor într-un semiconductor degenerat, dacă legea de dispersia în banda de conducție este de tip parabolic. Se dau: $\mu_n = 300 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$, $n = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $m_n = 0,2 m_0$.

Soluție

Se știe că pentru legea de dispersie indicată în enunț, concentrația electronilor de conducție este dată de,

$$n = N_c \Phi_{1/2}(\eta),$$

unde $\eta = (F - E_c) / k_B T$. Avem condiția de echilibru termodinamic (considerăm cazul general al unui semiconductor neomogen aflat la echilibru),

$$\vec{J}_n = \vec{J}_{n,drift} + \vec{J}_{n,dif} = qn \cdot \mu_n \cdot \vec{E} + qD_n \nabla n = 0,$$

în care la calculul concentrației electronilor trebuie avută în vedere deplasarea benzilor cu mărimea $-q\phi(r)$, $\phi(r)$ fiind potențialul electric,

$$\vec{E} = -\nabla \phi(\vec{r}).$$

În ultimă instanță asta se reduce la înlocuirea lui E_c cu $E_c - q\phi(r)$ și a lui E_v cu $E_v - q\phi(r)$ în expresia lui η . Condiția de echilibru conduce la,

$$-q\mu_n n \nabla \phi + \frac{qD_n}{k_B \cdot T} \frac{dn}{d\eta} \nabla \phi = 0 \Rightarrow D_n = \frac{n\mu_n k_B \cdot T}{q \frac{dn}{d\eta}}.$$

În cazul nedegenerat ($F_{1/2}(\eta) = \exp(\eta)$) expresia precedentă se reduce la cunoscuta relație a lui Einstein, în cel degenerat ($F_{1/2}(\eta) = 4\eta^{3/2} / 3\sqrt{\pi}$) se obține,

$$D_n = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2 \mu_n}{3q m_n} n^{2/3} = 3,6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}.$$

8.3- Într-un punct oarecare al unui semiconductor omogen de tip n se generează cu o sondă optică perechi de purtători de sarcină. Considerând problema unidimensională, să se determine lungimea de difuzie a golurilor,

știind concentrația purtătorilor de neechilibru la $x_1=2$ mm de sondă $\Delta p=10^{14}$ cm^{-3} și la $x_2=4,8$ mm, $\Delta p=10^{15}$ cm^{-3} .

Soluție

Ecuția de continuitate în problema examinată se reduce la forma,

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0,$$

cu soluția,

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right); \quad L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau_p} :$$

De aici rezultă,

$$L_p = \frac{x_2 - x_1}{\ln\left(\frac{\Delta p(x_1)}{\Delta p(x_2)}\right)} = 0,1 \text{ cm}.$$

8.4 Să se găsească concentrația purtătorilor de sarcină de neechilibru la suprafața unei probe groase de n-Ge (Fig.13) dacă generarea optică a perechilor este uniformă în volum. Se dau: $g_0=2,5 \cdot 10^{17}$ $\text{cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$, $\tau_p=4 \cdot 10^{-6}$ s, $s=500$ $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $D_p=49$ $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Soluție

În condițiile date ecuația de continuitate se poate scrie sub forma,

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0,$$

cu condițiile la limită,

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} \Big|_{x=0} = s \cdot \Delta p(0);$$

$$\Delta p \xrightarrow{x \rightarrow \infty} g_0 \tau_p.$$

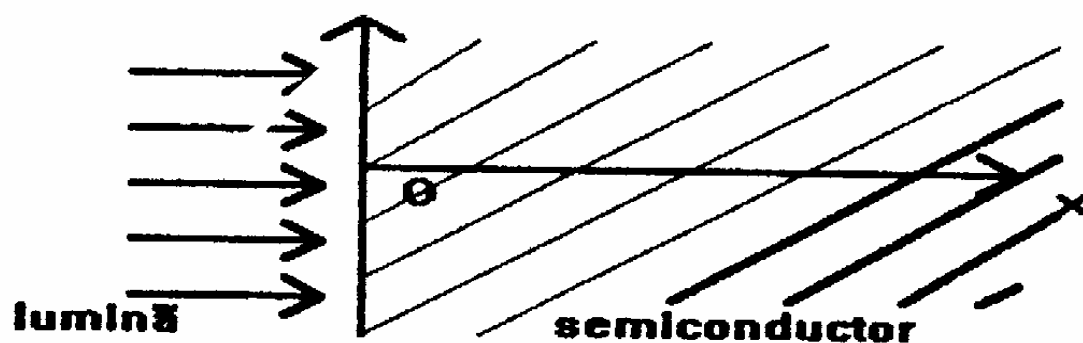


Fig. 13

Soluția este de forma,

$$\Delta p(x) = g_0 \tau_p + C_1 \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{L_p}\right).$$

și, având în vedere condițiile la limită precizate anterior, se obține,

$$\Delta p(x) = \frac{g_0 \tau_p}{L_p + s \cdot \tau_p} \left[L_p + \tau_p \cdot s \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) \right) \right]$$

de unde,

$$\Delta p(0) = g_0 \cdot \tau_p \frac{L_p}{L_p + s \cdot \tau_p} = 0,88 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}.$$

8.5- Să se afle concentrația golurilor în exces la suprafața iluminată a unei probe groase de n-Ge în cazul unei absorbții puternice a luminii ($\gamma L \gg 1$), dacă fluxul luminos incident este $J=6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\eta=1$, $s=500 \text{ cm/s}$, $\tau_p=10^{-4} \text{ s}$, $D_p=48 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Soluție

Ecuatia de continuitate și condițiile la limită pentru cazul dat au forma,

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0;$$

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} \Big|_{x=0} = s \cdot \Delta p(0) - J; \Delta p \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

unde în expresia vitezei de generare $g=\eta J/\exp(-\gamma x)$ (η fiind randamentul cuantic și γ coeficientul de absorbție) am avut în vedere că la absorbție puternică generarea este practic activă doar într-un strat din imediata vecinătate a suprafeței probei. Soluția este,

$$\Delta p(x) = \frac{J}{s + \frac{D_p}{L_p}} \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right),$$

de unde,

$$\Delta p(0) = J \frac{\tau_p}{L_p + s \cdot \tau_p} = 0,5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}.$$

8.6- Să se afle distribuția golurilor în exces și să se calculeze concentrația lor la suprafața iluminată a unei probe semilinfinită de n-Ge, dacă se cunosc $\gamma=14 \text{ cm}^{-1}$, $J=6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $\eta=1$, $s=500 \text{ cm/s}$, $\tau_p=10^{-4} \text{ s}$, $D_p=48 \text{ cm}^2/\text{s}$. Să se analizeze rezultatul obținut în cazurile limită ale unor coeficienți de absorbție mari, respectiv mici.

Soluție

Ecuția de continuitate și condițiile la limită au forma,

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 \exp(-\gamma x) - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0; \quad g_0 = \gamma J;$$

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} \Big|_{x=0} = s \cdot \Delta p(0); \quad \Delta p \rightarrow 0 \Big|_{x \rightarrow \infty}.$$

Căutând o soluție particulară de tipul $C g_0 \exp(-\gamma x)$, C fiind o constantă, se obține soluția generală sub forma,

$$\Delta p(x) = C_1 \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{L_p}\right) - \frac{g_0 \tau_p}{L_p^2 \gamma^2 - 1} \exp(-\gamma x).$$

Tinând cont de condițiile la limită rezultă,

$$\Delta p(x) = \frac{g_0 \tau_p}{L_p^2 \gamma^2 - 1} \left[\frac{\gamma L_p^2 + s \tau_p}{L_p + s \tau_p} \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) - \exp(-\gamma x) \right] \Rightarrow \Delta p(0) = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Cazul $\gamma=0$ (generare uniformă în volum) conduce la expresia deja cunoscută,

$$\Delta p(0) = g_0 \tau_p \frac{L_p}{L_p + s \tau_p}.$$

8.7- Să se determine expresia intensității câmpului electric în cazul efectului Dember, care apare pe direcția normală la suprafața iluminată a semiconductorilor. Suprafața este iluminată cu lumină puternic absorbită astfel încât generarea de perechi are loc într-un strat subțire din imediata vecinătate a suprafeței. Să se analizeze expresia obținută în cazul n-Ge la $T=300K$, dacă $L=0,3mm$, $n_0=5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $\epsilon_r=16$. Se consideră $\Delta\sigma/\sigma \ll 1$ și $|\Delta n - \Delta p| \ll \Delta p$

Soluție

Avem deci o problemă unidimensională și fie Ox direcția iluminării. În condiții staționare,

$$j_{nx} + j_{px} = 0 \Rightarrow \sigma \cdot E + qD_n \frac{d\Delta n}{dx} - qD_p \frac{d\Delta p}{dx} = 0;$$

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_n = q(p\mu_p + n\mu_n).$$

De aici rezultă câmpul efectului Dember,

$$E = -\frac{q}{\sigma} \left(D_n \frac{d\Delta n}{dx} - D_p \frac{d\Delta p}{dx} \right) = -\frac{q}{\sigma} \frac{d}{dx} \left[(D_n - D_p) \Delta p - D_n (\Delta p - \Delta n) \right].$$

Punem $E = E' + E''$, unde,

$$E' = -\frac{q}{\sigma} (D_n - D_p) \frac{d\Delta p}{dx};$$

$$E'' = \frac{q}{\sigma} D_n \left(\frac{d\Delta p}{dx} - \frac{d\Delta n}{dx} \right).$$

Dacă este satisfăcută condiția $|\Delta n - \Delta p| \ll \Delta p$, se poate neglija termenul E' în comparație cu E'' . Să verificăm valabilitatea condiției de cvasineutralitate. Vom considera în ecuația Poisson doar E ,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\Delta p - \Delta n) \Rightarrow |\Delta p - \Delta n| = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r (D_n - D_p) d^2 \Delta p}{\sigma dx^2}.$$

Concentrația purtătorilor în exces este dată de ecuația de continuitate,

$$\operatorname{div} (D \operatorname{grad} \Delta p) - \frac{\Delta p}{\tau} = 0,$$

unde D este coeficientul de difuzie ambipolară, constant la abateri mici de la echilibru, astfel încât ecuația precedentă devine,

$$\frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p}{L^2} = 0; \quad L = \sqrt{D \cdot \tau}.$$

Pentru o probă groasă în comparație cu L soluția este,

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp\left(-\frac{x}{L}\right),$$

și revenind la ecuația lui Poisson,

$$\frac{|\Delta p - \Delta n|}{\Delta p} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r k_B \cdot T (b - 1)}{q^2 (b n_0 + p_0) L^2}, \quad b = \frac{\mu_n}{\mu_p}.$$

Am avut aici în vedere relația lui Einstein $D_{n,p} = (k_B T/q) \mu_{n,p}$, valabilă pentru un semiconductor nedegenerat.

Dacă $n_0 \gg p_0$ se obține:

$$\frac{|\Delta p - \Delta n|}{\Delta p} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r k_B \cdot T (b - 1)}{q^2 b n_0 L^2} = 2,7 \cdot 10^{-7}.$$

Rezultatul arată că neutralitatea electrică locală este atinsă în condiții obișnuite, abaterile fiind foarte mici. În consecință pentru intensitatea câmpului electric în cazul efectului Deiber expresia,

$$E = - \frac{q}{\sigma} (D_n - D_p) \frac{d\Delta p}{dx}$$

este acceptabilă, cu o bună aproximație.

8.8- Să se afle concentrația purtătorilor în exces la marginile superioară și inferioară ale unei plăci subțiri de semiconductor de tip n (Fig.14) în condițiile unei generări optice uniforme în volum. Se dau $J=5.1016 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\gamma=5 \text{ cm}^{-1}$, $\eta=1$ (randamentul cuantic), $d=0,7 \text{ mm}$ (grosimea probei), $s=500 \text{ cm/s}$, $\tau_p=10^{-4} \text{ s}$, $D_p=49 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Soluție

Fie g_0 viteza de generare uniformă a purtătorilor suplimentari în volumul probei ($g_0=J/\eta$). În condițiile date ecuația de continuitate și condițiile la limită asociate au forma,

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} + g_0 - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0;$$

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} \Big|_{x=0} = s \cdot \Delta p(0);$$

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} \Big|_{x=d} = s \cdot \Delta p(d).$$

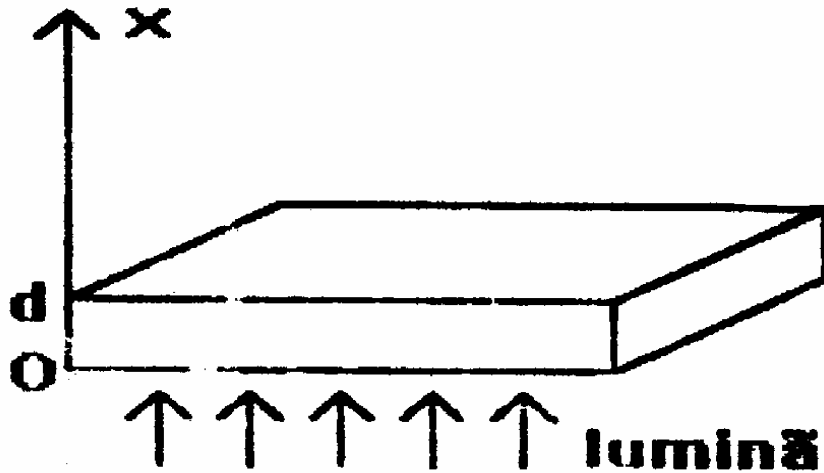


Fig. 14

Soluția generală este de tipul,

$$\Delta p(x) = g_0 \tau_p + C_1 \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right) + C_2 \exp\left(\frac{x}{L_p}\right),$$

și ținând cont de condițiile la capete se obține,

$$C_1 = sg_0 \tau_p L_p \frac{(D_p + sL_p) \exp\left(\frac{d}{L_p}\right) + D_p - sL_p}{-(D_p + sL_p)^2 \exp\left(\frac{d}{L_p}\right) + (D_p - sL_p)^2 \exp\left(-\frac{d}{L_p}\right)},$$

$$C_2 = sg_0 \tau_p L_p \frac{(D_p - sL_p) \exp\left(-\frac{d}{L_p}\right) + D_p + sL_p}{-(D_p + sL_p)^2 \exp\left(\frac{d}{L_p}\right) + (D_p - sL_p)^2 \exp\left(-\frac{d}{L_p}\right)}.$$

Prin urmare rezultatul cerut este,

$$\Delta p(0) = \Delta p(d) = g_0 \tau_p D_p \frac{(D_p + sL_p) \exp\left(\frac{d}{L_p}\right) - (D_p - sL_p) \exp\left(-\frac{d}{L_p}\right) - 2sL_p}{(D_p + sL_p)^2 \exp\left(\frac{d}{L_p}\right) - (D_p - sL_p)^2 \exp\left(-\frac{d}{L_p}\right)} = 9,8 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}.$$

8.9- Să se afle distribuția gurilor de neechilibru într-o probă lungă de n-Ge la injecție staționară de gouri într-un punct și în prezența unui câmp electric $E=5 \text{ V/cm}$, orientat de-a lungul probei. Se dau $T=300 \text{ K}$, $L_p=0,08 \text{ cm}$. Se va considera că semiconductorul este nedegenerat.

Soluția

Ecuația de continuitate este de forma (problema este separabilă-se pot analiza separat difuzia pe O_y și O_z și mișcarea pe O_x),

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \mu_p \cdot E \frac{d\Delta p}{dx} - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{qE}{k_B \cdot T} \frac{d\Delta p}{dx} - \frac{\Delta p}{L_p^2} = 0, \quad x \neq 0,$$

unde am utilizat relația Einstein pentru cazul nedegenerat $D_p = (k_B T/q) \mu_p$. Alegem originea în punctul de injecție. La distanțe mari de acesta concentrațiile de neechilibru Δp trebuie să se anuleze. Deci soluțiile sunt de forma (Fig.15),

$$\Delta p(x) = \begin{cases} \Delta p(0) \exp(k_1 x), & x < 0 \\ \Delta p(0) \exp(k_2 x), & x > 0 \end{cases}$$

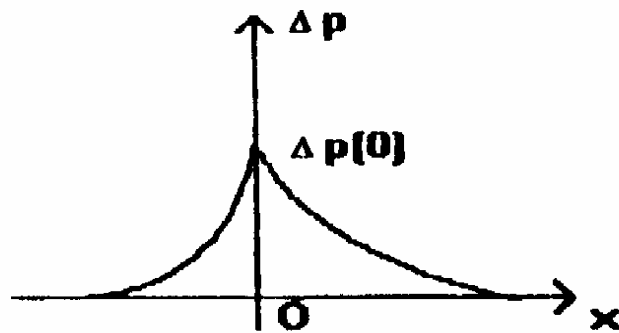


Fig 15

Introducând notațiile,

$$l = \frac{k_B \cdot T}{qE} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}; \quad L_B = E \mu_p \tau_p = 1,57 \text{ cm},$$

L_B fiind lungimea de drift, se obține,

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \left(1 + \frac{4l}{L_B}\right)^{1/2}}{2l}, \quad l \ll L_B \Rightarrow \begin{cases} k_1 \cong \frac{1}{l} \\ k_2 \cong -\frac{1}{L_B} \end{cases}$$

8.10- Într-un semiconductor omogen semiinfinit de tip n ($x \geq 0$) se injectează în mod staționar goluri prin suprafața $x=0$. De-a lungul probei, în direcția $x > 0$, se aplică un câmp electric $E=10 \text{ V/cm}$. Să se determine la ce distanță

de suprafața probei concentrația golurilor în exces se reduce la $\Delta p = \Delta p(0)/2$. Se dă $L_p = 0,1$ cm.

Soluție

În cazul dat $L_2 \gg l$ (vezi soluția problemei precedente),

$$L_B = \frac{L_p^2 \cdot qE}{k_B \cdot T} = 3,9 \text{ cm}; \quad l = \frac{k_B \cdot T}{qE} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \ll L_B.$$

Apoi difuzia este neglijabilă în comparație cu driftul, deci distribuția golurilor de neechilibru este dată de,

$$\Delta p(x) = \Delta p(0) \exp\left(-\frac{x}{L_B}\right).$$

Prin urmare,

$$\Delta p(x) = \frac{\Delta p(0)}{2} \Rightarrow x = L_B \cdot \ln \frac{\Delta p(0)}{\Delta p(x)} = 1,6 \text{ cm}.$$

8.11- Să se studieze distribuția golurilor de neechilibru injectate în mod staționar prin suprafața $x=0$ a unui semiconductor de tip n omogen și semiinfinit ($x \geq 0$), dacă timpul de viață al golurilor este $\tau_p = a/p$, unde a este o constantă. Se va considera $\Delta p \gg p_0$ și se va neglija componenta de drift a curentului de goluri.

Soluție

Cu neglijaarea termenului de drift, ecuația de continuitate capătă forma,

$$D_p \frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{(\Delta p)^2}{a} = 0 \quad \left| \cdot 2 \frac{d\Delta p}{dx} \Rightarrow \right.$$

$$D_p \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Delta p}{dx} \right)^2 - \frac{2}{3a} \frac{d}{dx} (\Delta p)^3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\Delta p}{dx} \right)^2 - \frac{2}{3a} (\Delta p)^3 = \text{const.}$$

unde constanta este determinată de condiția,

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta p \rightarrow 0 \text{ și } \frac{d\Delta p}{dx} \rightarrow 0.$$

Concentrația de neechilibru trebuie să scadă când x crește, deci soluția acceptabilă este,

$$\Delta p(x) = \frac{\Delta p(0)}{\left(1 + \frac{x}{x_0} \right)^2}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{6aD_p}{\Delta p(0)}}.$$

9. FENOMENE DE TRANSPORT ÎN CÂMP MAGNETIC

9.1. Într-o probă de tip n densitatea de curent în lungul axei Ox (Fig. 16) este $j_x = 0,1 \text{ A/cm}^2$. Câmpul magnetic după axa Oz este $H = 3 \cdot 10^2 \text{ A/cm}$. În condițiile împrăștiirii pe oscilațiile rețelei $\mu_{nH} = 1,18\mu_n$. Să se determine R_H și tensiunea Hall V_{HP} dacă $n_0 = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ și $a = 0,5 \text{ cm}$.

Soluție

Într-un semiconductor omogen și izotrop aflat sub acțiunea unui câmp electric E și a unui câmp magnetic slab B ($\mu_{nH} B \ll 1$), perpendicular pe E , densitățile de curent se pot exprima prin relațiile,

$$\begin{aligned} \vec{j}_n &= qn\mu_n \left[\vec{E} \left(1 - \eta_n (\mu_{nH} \cdot B)^2 \right) - \mu_{nH} \cdot \vec{E} \times \vec{B} \right]; \\ \vec{j}_p &= qp\mu_p \left[\vec{E} \left(1 - \eta_p (\mu_{pH} \cdot B)^2 \right) + \mu_{pH} \cdot \vec{E} \times \vec{B} \right]. \end{aligned}$$

Aici $\mu_{n,pH}$ sunt mobilitățile Hall, iar $\eta_{n,p}$ sunt constante date de dependența de energie a timpului de relaxare.

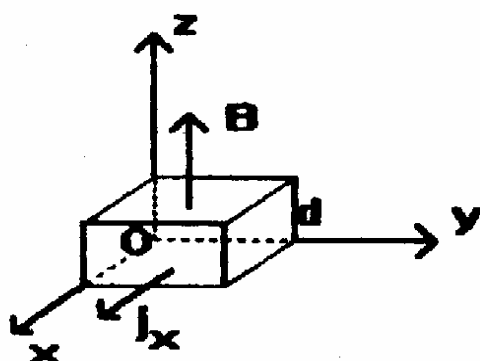


Fig.16

În cazul unui semiconductor nedegenerat neomogen în ecuația precedentă pentru j_n trebuie făcută înlocuirea,

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}_n^* = \vec{E} + \frac{k_B \cdot T}{q} \vec{\nabla} (\ln n),$$

iar în cea pentru j_p se face înlocuirea,

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}_p^* = \vec{E} - \frac{k_B \cdot T}{q} \vec{\nabla} (\ln p).$$

Tensiunea V_H și câmpul E_y se determină din condiția $j_y = j_{ny} + j_{py} = 0$. Neglijând termenii în B^2 se obține,

$$j_x = qn_0\mu_n E_x ;$$

$$j_y = qn_0\mu_n (E_y + \mu_{nH} \cdot B E_x) = 0.$$

De aici,

$$E_y = -\mu_{nH} \cdot B \frac{j_x}{qn_0\mu_n},$$

și,

$$R_H = \frac{E_y}{j_x \cdot B} = R_{H0} = -\frac{\mu_{nH}}{qn_0\mu_n} = 7,38 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 / \text{C};$$

$$V_H = aE_y = aR_H j_x B = 3,7 \text{ mV}.$$

9.2- La aplicarea pe o probă de tip p a câmpului magnetic $H=12 \cdot 10^2 \text{ A/cm}$, perpendicular pe direcția câmpului electric, rezistivitatea a crescut cu 0,22%. Să se determine coeficientul magnetorezistivității ζ și coeficientul η_p , dacă $\mu_{pH}=2240 \text{ cm}^2/\text{V.s}$.

Soluție

Cu condiția $j_y=0$ și neglijând termenii în B^2 , se obține (v. problema precedentă),

$$E_y = \beta \cdot E_x;$$

$$j_{px} = qp\mu_p \cdot E_x \left[1 - \beta^2 (\eta_p - 1) \right];$$

$$\beta = \mu_{pH} \cdot B.$$

Variația $\Delta\sigma/\sigma_0$ este mică,

$$j_x = (\sigma_0 + \Delta\sigma) E_x \Rightarrow \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} = \zeta (R_{H0} \sigma_0 B)^2 = (1 - \eta_p) \cdot \beta^2;$$

unde R_{H0} este valoarea constantei Hall la $B \rightarrow 0$, iar ζ este coeficientul magnetorezistivității.

Relațiile precedente conduc la,

$$R_{H0} = \frac{\beta}{\sigma_0 B} \Rightarrow \zeta = \eta_p - 1 = 0,3.$$

Această valoare a lui ζ este caracteristică pentru împrăștierea golurilor pe oscilațiile acustice ale rețelei.

9.3- Să se determine constanta Hall în InSb care conține acceptori cu concentrația $N_a = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, dacă raportul mobilităților Hall și de drift este 1,18, $\mu_n / \mu_p = 80$. Câmpul magnetic este slab, $n_i = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, $T = 300 \text{ K}$, acceptorii se consideră complet ionizați.

Soluție

Câmpul Hall rezultă din condiția,

$$j_y = j_{ny} + j_{py} = q(n\mu_n + p\mu_p)E_y + q(n\mu_n\mu_{nH} - p\mu_p\mu_{pH})E_x B = 0 \Rightarrow$$

$$E_y = \mu_{pH} \cdot B E_x \frac{p - nb^2}{p + nb^2}.$$

Constanta Hall este dată de:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = \frac{p - nb^2}{(p + nb^2)^2} \frac{\mu_{pH}}{\mu_p} \frac{1}{q},$$

iar din condiția de neutralitate electrică se obține,

$$p = n + N_a = N_a + \frac{n_i^2}{p} \Rightarrow p = \frac{N_a}{2} + \sqrt{\frac{N_a^2}{4} + n_i^2} = 5,47 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}.$$

Deci $n = n_i^2 / p = 0,47 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ și $R_H = -1190 \text{ cm}^3/\text{C}$.

9.4- Într-un semiconductor de tip p plasat într-un câmp magnetic pentru care $\beta_p = \mu_p B = 0,2$ s-a obținut $R_H = 0$. Să se determine coeficientul magnetorezistivității ζ , dacă $b = \mu_n / \mu_p = 30$ și se neglijează dependența de energie a timpului de relaxare.

Soluție

La $R_H = 0$, E_y se anulează. Neglijând dependența de energie a timpului de relaxare, densitățile de curent în câmp magnetic pot fi puse sub forma,

$$\vec{j}_n = \frac{qn\mu_n}{1 + (\mu_n B)^2} (\vec{E} - \mu_n \cdot \vec{E} \times \vec{B});$$

$$\vec{j}_p = \frac{qp\mu_p}{1 + (\mu_p B)^2} (\vec{E} + \mu_p \cdot \vec{E} \times \vec{B}).$$

prin urmare,

$$j_y = j_{ny} + j_{py} = \frac{qn\mu_p}{1 + b^2\beta^2} b\beta E_x - \frac{qp\mu_p}{1 + b^2\beta^2} \beta E_x = 0 \Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{b^2(1 + \beta^2)}{1 + b^2\beta^2} = 253;$$

$$j_x = qn\mu_n \cdot E_x \left(1 - b^2\beta^2 - b\beta^2 \frac{p - nb^2}{p + nb} \right) + qp\mu_p \cdot E_x \left(1 - \beta^2 + \beta^2 \frac{p - nb^2}{p + nb} \right)$$

De aici,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} &= -pn\beta^2 \frac{b(1+b)^2}{(p+nb)^2} = \zeta (R_{H0} \cdot \sigma_0 \cdot B)^2 \\ R_{H0} \cdot \sigma_0 \cdot B &= \frac{E_y}{E_x} = \beta \cdot \frac{p-nb^2}{p+nb} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \zeta = \frac{pb}{n} \cdot \frac{(1+b)^2}{\left(\frac{p}{n} - b^2\right)^2} = 0,95.$$

9.5- Să se determine tensiunea V_{ME} asociată efectului fotoelectromagnetic între fețele unei probe cubice masive de tip n, dacă $\beta_p = \mu_{pH} B = 0,07$, concentrația maximă a electronilor suplimentari (la suprafața iluminată $x=0$) este $\Delta n(0) = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $\rho_0 = 1,6 \Omega \text{ cm}$, $D_p = 45 \text{ cm}^2/\text{s}$, $b=2,1$.

Soluție

Efectul fotoelectromagnetic constă în apariția unui câmp electric perpendicular pe planul determinat de câmpul magnetic și de direcția de iluminare (Fig.17). Pe direcția Ox apare un curent de difuzie (generare neuniformă de perechi), iar sub acțiunea câmpului magnetic pe Oy apare o diferență de potențial V_{ME}

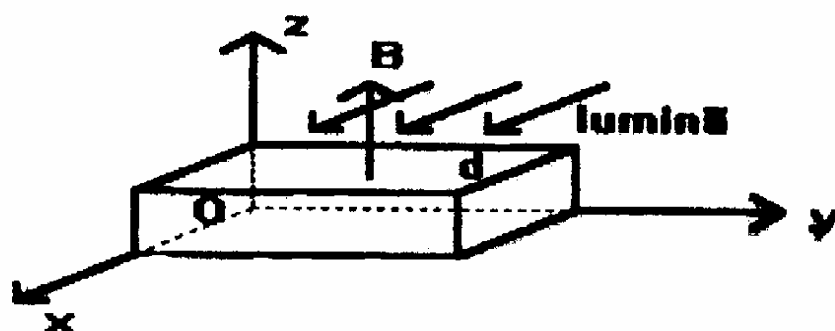


Fig.17

Considerăm că dimensiunile probei în planul xy sunt suficient de mari pentru a putea neglija orice dependentă de y și z a mărimilor ce vor fi analizate. În cazul staționar,

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{dE_y}{dx} = 0,$$

deci E_y este constant peste tot.

Apoi, considerând că lumina incidentă este uternic absorbită, fotogenerarea este activă doar într-un strat subțire din imediata vecinătate a suprafeței, deci ecuațiile de continuitate se reduc la,

$$\frac{1}{q} \text{div } \vec{J}_n = \frac{\Delta n}{\tau_n} = \frac{\Delta p}{\tau_p} = -\frac{1}{q} \text{div } \vec{J}_p.$$

În câmp magnetic slab se pot reține în expresiile densităților de curent doar termenii liniari în B ,

$$\begin{aligned} \vec{J}_n &\approx \vec{J}_n^* = \mu_{nH} \cdot \vec{J}_n^* \times \vec{B}; & \vec{J}_n^* &= qn\mu_n \vec{E} + qD_n \vec{\nabla} n; \\ \vec{J}_p &\approx \vec{J}_p^* + \mu_{pH} \cdot \vec{J}_p^* \times \vec{B}; & \vec{J}_p^* &= qp\mu_p \vec{E} - qD_p \vec{\nabla} p. \end{aligned}$$

Neglijând într-o primă aproximație dependența de B în expresiile precedente, se determină Δn și Δp din ecuațiile de continuitate cu condițiile la limită,

$$\begin{aligned} g &\approx = \frac{J_m}{q} + s_0 \cdot \Delta n \Big|_{x=0} ; \\ 0 &= \frac{J_m}{q} + s_d \cdot \Delta n \Big|_{x=d} . \end{aligned}$$

Câmpul E_y rezultă din condiția de circuit deschis,

$$\int_0^d j_y dx = 0, \quad j_y = qE_y (n\mu_n + p\mu_p) + qB(\mu_{nH} + \mu_{pH})D^* \frac{d\Delta n}{dx} \Rightarrow$$

$$0 = \alpha_0 \cdot E_y d + qB(\mu_{nH} + \mu_{pH})D_p \Delta n(0),$$

unde am considerat pentru simplitate o probă groasă (d foarte mare, $\Delta n(0) \gg \Delta n(d)$) și am utilizat notația,

$$D^* = D \frac{n\tau_p + p\tau_n}{\tau_n(n+p)},$$

D fiind coeficientul de difuzie ambipolar.

Deci,

$$V_{FM} = E_y d = -\rho_0 q \cdot \beta (1+b) D_p \Delta n(0) = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ V.}$$

9.6- Să se determine timpul de viață într-un semiconductor de tip p, dacă la aplicarea unui câmp electric $E_{y1} = 0,168 \text{ V/cm}$ și a unui câmp magnetic $H_z = 3 \cdot 10^2 \text{ A/cm}$, curentul după Oy nu depinde de iluminarea slabă pe direcția Ox . Dimensiunile probei sunt mari, se neglijează captura purtătorilor pe nivele adânci, $D_n = 98 \text{ cm}^2/\text{s}$, $(\mu_{nH} + \mu_{pH}) / (\mu_n + \mu_p) = 1,2$.

Soluție

În cazul dat se produce compensarea V_{FM} (v. probl. 10.5) prin variația căderii de tensiune datorită fotoconducției. Ecuația de continuitate (generare pe fața $x=0$) conduce la,

$$\Delta n = \Delta p = \Delta n(0) \exp\left(-\frac{x}{L_n}\right).$$

Cu observația de mai sus, se poate scrie,

$$\int_0^L j_y dx = 0 \Rightarrow 0 = qE_{1y} (\mu_n + \mu_p) \Delta n(0)L_n + qB(\mu_{nH} + \mu_{pH})D_n \Delta n(0).$$

De aici,

$$\tau = \frac{L_n^2}{D_n} = \left(\frac{\mu_{nH} + \mu_{pH}}{\mu_n + \mu_p} \cdot \frac{B}{E_{1y}} \right)^2 D_n = 5 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

10.7- Pe suprafața $x=0$ (fig. 15) a unei probe de tip n se generează optic purtători de neechilibru, astfel încât $\Delta n(0) = 2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Măsurătorile de efect fotoelectromagnetic și magnetorezistivitate indică valorile $V_{EM} = 3,8 \text{ mV}$ și $\delta = 1,2\%$ (δ fiind variația relativă a rezistivității probei, cu $\beta_p = \mu_{pH} B = 0,1$). Să se determine τ_n și τ_p dacă $\mu_n = 3800 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$, $b = 2,1$, $D_p = 45 \text{ cm}^2/\text{s}$, $d = 0,2 \text{ cm}$, $a = 1 \text{ cm}$.

Soluție

Ecuțiile de continuitate și expresiile densităților de curent în câmp magnetic (v. probl 9.5) conduc, pentru o probă suficient de groasă, la

$$\Delta n(x) = \Delta n(0) \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right);$$

$$\Delta p(x) = \frac{\tau_p}{\tau_n} \Delta n(x).$$

Abaterrea de la echilibru fiind mică, se obține,

$$\delta = \frac{1}{d\sigma_0} \int_0^d \Delta \sigma(x) dx = \frac{\Delta n(0)}{n_0} \cdot \frac{L_p}{d} \left(1 + \frac{\tau_p}{b\tau_n} \right).$$

Curentul total în direcția Oy este nul (circuit deschis),

$$j_y = \frac{\sigma_0 V_{FM}}{a} + q\beta \cdot (1+b) D_n \frac{\tau_p}{\tau_n} \frac{d\Delta n}{dx};$$

$$\int_0^d j_y dx = 0 \Rightarrow V_{FM} = \frac{a}{d} \cdot \frac{(1+b) D_p}{\mu_n} \cdot \frac{\Delta n(0)}{n_0} \cdot \frac{\tau_p}{\tau_n}.$$

Ținând cont de acest ultim rezultat și de expresia pentru d , găsim,

$$\tau_p = \frac{1}{D_p} \left(\frac{n_0}{\Delta n(0)} \cdot \frac{d \cdot \delta}{1 + \frac{\tau_p}{b\tau_n}} \right)^2 = 10^{-5} \text{ s}, \quad \tau_n = 10^{-6} \text{ s}.$$

10. FENOMENE DE SUPRAFAȚĂ

10.1- Să se determine potențialul electric într-un strat îmbogățit din vecinătatea suprafeței unui semiconductor de tip n. Să se estimeze lărgimea stratului dacă donorii din volumul semiconductorului sunt complet ionizați.

Soluție

Prezența stărilor de suprafață în cazul probelor semiconductoare de dimensiuni finite, conduce la apariția unui strat electric dublu. Câmpul electric generat de acesta determină curbarea benzilor energetice în vecinătatea suprafeței,

$$E_c(\vec{r}) = E_{c0} - q\varphi(\vec{r});$$

$$E_v(\vec{r}) = E_{v0} - q\varphi(\vec{r}).$$

În regiunea de sarcină spațială concentrația purtătorilor liberi va depinde deci de coordonate,

$$n(\vec{r}) = N_c \exp\left(\frac{F - E_{c0} + q\varphi(\vec{r})}{k_B \cdot T}\right) = n \exp\left(\frac{q\varphi(\vec{r})}{k_B \cdot T}\right);$$

$$p(\vec{r}) = N_v \exp\left(\frac{E_{v0} - q\varphi(\vec{r}) - F}{k_B \cdot T}\right) = p \exp\left(-\frac{q\varphi(\vec{r})}{k_B \cdot T}\right)$$

Potențialul de suprafață este dat de ecuația lui Poisson, care în cazul analizat capătă forma,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} [n - n(x)] = -\frac{qn}{\epsilon_0 \epsilon} \left[1 - \exp\left(\frac{q\varphi(x)}{k_B \cdot T}\right) \right]$$

cu condițiile la limită,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \rightarrow 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow 0 \end{array} \right|_{x \rightarrow \infty} ; \quad \varphi = \varphi_s < 0 \Big|_{x \rightarrow 0}.$$

Deci,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{2} \frac{k_B \cdot T}{qL_D} \left[\exp\left(\frac{q \cdot \varphi}{k_B \cdot T}\right) - \frac{q \cdot \varphi}{k_B \cdot T} - 1 \right]^{1/2},$$

unde L_D este lungimea Debye,

$$L_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot k_B \cdot T}{nq^2}}.$$

Lărgimea stratului îmbogățit L este dată de condiția $\varphi(L)/k_B T = 1$. Atunci avem,

$$\int_{\frac{q\varphi}{k_B T}}^{\frac{q\varphi_s}{k_B T}} (\exp(v) - v - 1)^{-1/2} dv = \sqrt{2} \frac{x}{L_D},$$

și dacă $\varphi_s/k_B T \gg 1$,

$$L = aL_D; \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\infty} (\exp(v) - v - 1)^{-1/2} dv \cong 1,1.$$

Deci chiar dacă stratul este puternic îmbogățit, lărgimea lui nu diferă mult de lungimea Debye.

10.2- La suprafața p-Si există un strat sărăcit în purtători, concentrația electronilor fiind neglijabil de mică. Să se găsească lărgimea zonei de sarcină

spațială la 300 K, dacă $\phi_s=0,25$ V, iar concentrația acceptorilor complet ionizați în volum este $N_a=10^{15}$ cm⁻³

Soluție

Forma potențialului în vecinătatea suprafeței este determinată de ecuația lui Poisson,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{k_B \cdot T}{qL_D^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right) \right]$$

unde L_D este lungimea Debye, iar condițiile la limită coincid cu cele din problema precedentă.

Deci,

$$\int_{\frac{q\phi}{k_B \cdot T}}^{\frac{q\phi_s}{k_B \cdot T}} (\exp(-v) + v - 1)^{-1/2} dv = \sqrt{2} \frac{x}{L_D}$$

În regiunea unde $q\phi/k_B T \ll 1$ sarcina volumică este mică, iar pentru $q\phi/k_B T \gg 1$ ea este aproape constantă și egală cu $-qN_a$. Limita regiunii de sarcină spațială poate fi determinată cu relația $q\phi(w)/k_B T=1$, w fiind deci dat de,

$$w = \frac{L_D}{\sqrt{2}} \int_1^{\frac{q\phi_s}{k_B T}} (\exp(-v) + v - 1)^{-1/2} dv = L_D \left(\frac{2q \cdot \phi_s}{k_B \cdot T} \right)^{1/2} = 57 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

10.3- La suprafața unei probe de n-Si apare o curbare în sus accentuată a benzilor, corespunzător formării unui strat sărăcit în purtători. La ce valoare

a potențialului din vecinătatea suprafeței concentrația golurilor devine egală cu cea a electronilor? Să se estimeze lățimea stratului sărăcit în care $p(x) > n(x)$, dacă $\phi_s = 0,5 \text{ eV}$, iar în volum $n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $T = 300 \text{ K}$, $b = \mu_n / \mu_p = 2,9$.

Soluție

Structura de benzi în vecinătatea suprafeței are alura indicată în Fig. 18. Ecuația Poisson trebuie scrisă cu considerarea prezenței ambelor tipuri de purtători,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{k_B \cdot T}{qL_D^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right) + \frac{p}{n} \left[\exp\left(\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right) - 1 \right] \right\},$$

n și p fiind concentrațiile purtătorilor în volumul semiconductorului.

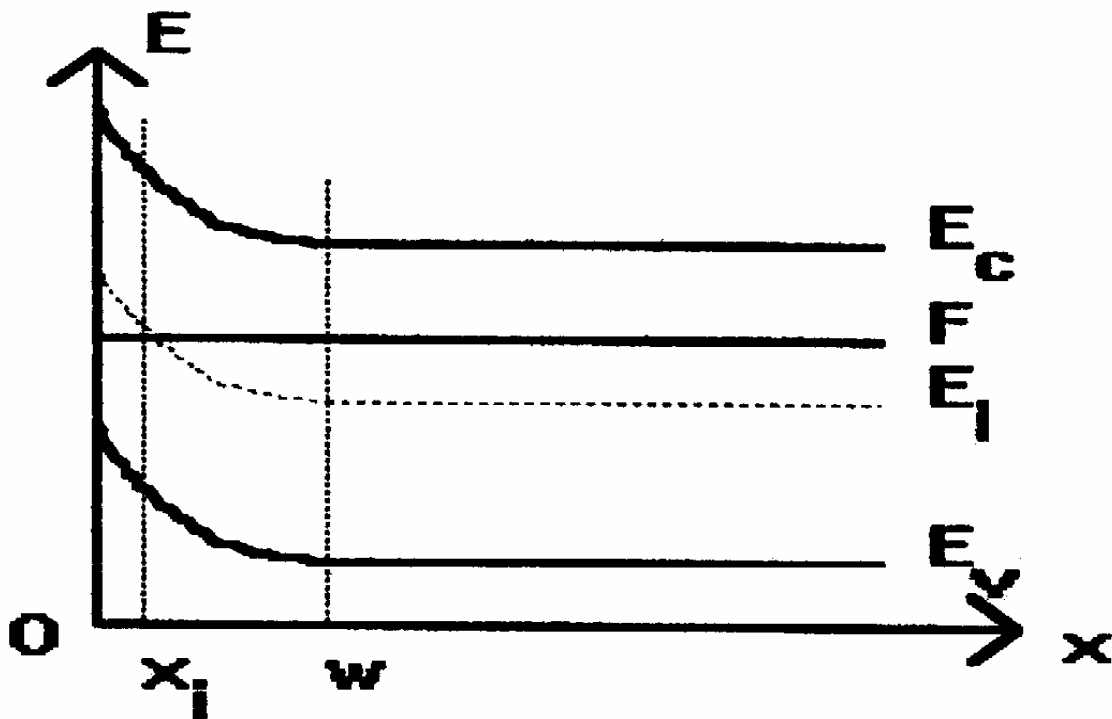


Fig.18

După integrare rezultă,

$$\int_{\frac{q\varphi}{k_B T}}^{\frac{q\varphi_s}{k_B T}} \left(e^{-v} + v - 1 + \frac{p}{n} (e^v - v - 1) \right)^{-1/2} dv = \sqrt{2} \frac{x}{L_D},$$

iar punctul $x = x_i$, pentru care $n(x_i) = p(x_i)$ este dat de condiția (v. probl. 10.1),

$$\varphi(x_i) = \frac{k_B \cdot T}{2q} \ln \frac{n}{p};$$

$$x_i = \frac{L_D}{\sqrt{2}} \int_{v_i}^v \left(e^{-v} + v - 1 + \frac{p}{n} (e^v - v - 1) \right)^{1/2} dv.$$

Regiunea de inversie apare doar dacă $v_s > v_i$, adică

$$\varphi_s > \frac{k_B \cdot T}{2q} \ln \frac{n}{p}.$$

Întrucât în condițiile date $v_s \gg 1$ și $p \gg n$, avem,

$$x_i \approx \frac{L_D}{\sqrt{2}} \int_{v_i}^v \left(v + \frac{p}{n} e^v \right)^{-1/2} dv.$$

Dacă $v_s \ll \ln(n/p)$ contribuția golurilor libere se poate neglija și obținem,

$$x_i \cong L_D \left[\left(\frac{2q \cdot \varphi_s}{k_B \cdot T} \right)^{1/2} - \left(\ln \frac{n}{p} \right)^{1/2} \right] = 1,4 L_D.$$

Apoi $p = n_i^2 / n$, $n_i = 1,03 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, deci $x_i = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$.

10.4- Perpendicular pe suprafața unui semiconductor de tip p cu impurități acceptoare complet ionizate în volum, se aplică un câmp electric suficient de slab pentru ca peste tot în semiconductor $q\phi/k_B T \ll 1$ (Fig.19). Să se determine forma potențialului în vecinătatea suprafeței și potențialul de suprafață, dacă $E = 2 \cdot 10^3 \text{ V/cm}$, $p = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $\epsilon = 16$, $T = 300 \text{ K}$.

Soluție

În cazul dat ecuația Poisson și condițiile la limită asociate au forma,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{q}{\epsilon_0\epsilon} [p(x) - N_a] = -\frac{qp}{\epsilon_0\epsilon} \left[\exp\left(-\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right) - 1 \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi \rightarrow 0 \\ \frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0 \end{array} \right|_{x \rightarrow \infty}, \quad E = -\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0}$$

$$p(x) = p \exp\left(-\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right) \quad p = N_a$$

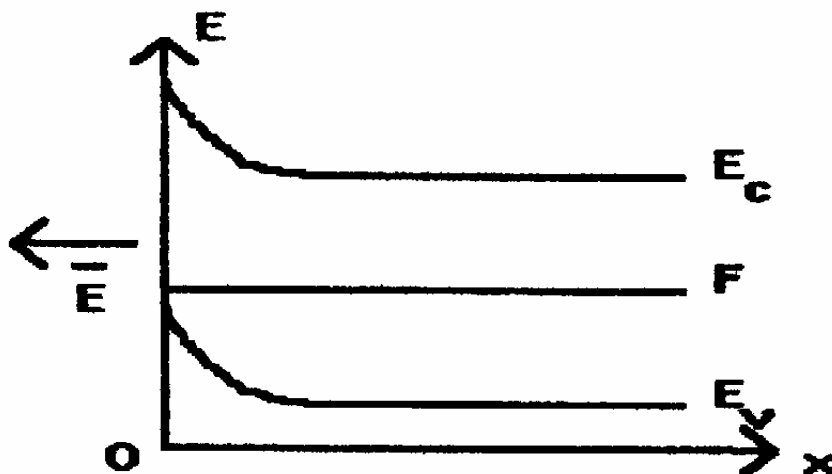


Fig.19

Înmultiplicând ambii membri ai ecuației cu $2\phi(x)$, integrând și utilizând condițiile de espete se obține,

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{2q\rho}{\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{k_B \cdot T}{q} \exp\left(-\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right) + \phi + C \right] \quad C = -\frac{k_B \cdot T}{q}$$

constanta C fiind determinată de primele două condiții la limită.

Conform enunțului,

$$\frac{q|\phi(x)|}{k_B \cdot T} \ll 1 \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = -\left(\frac{q^2\rho}{\epsilon_0\epsilon \cdot k_B \cdot T}\right)^{1/2} \phi(x);$$

$$\phi(x) = \phi_s \exp\left(-\frac{x}{L_D}\right),$$

L_D fiind lungimea Debye. Potențialul de suprafață este determinat de valoarea câmpului aplicat,

$$\phi_s = EL_D = -1,9 \text{ mV},$$

unde am avut în vedere că $E < 0$ (v. Fig. 19).

11.5- Să se găsească variația lucrului de extracție a electronilor, dacă la suprafața unui semiconductor sunt adsorbite molecule cu un moment dipolar $d=3 \cdot 10^{-28}$ C.m și densitatea $N=10^{12}$ cm⁻² (Fig. 20). Să se compare cu rezultatul obținut în cazul adsorbției de impurități donoare cu aceeași concentrație la suprafața unui semiconductor intrinsec.

Soluție

Variația lucrului de extracție este determinată de saltul potențialului ϕ în stratul dublu,

$$\Delta\Phi = -\frac{q}{\epsilon_0} Nd = -3,4 \cdot 10^{-3} \text{ eV.}$$

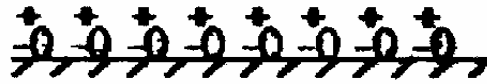


Fig.20

În cazul adsorbției de impurități donoare, vom aproxima potențialul $\phi(x)$ prin,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_s - Ex, & 0 \leq x \leq \frac{\varphi_s}{E} \\ 0, & x \geq \frac{\varphi_s}{E} \end{cases},$$

în care $E = \text{const}$ și vom admite că $q\varphi_s/k_B T \gg 1$ și că semiconductorul este intrinsec. Atunci,

$$E = \frac{qN}{\epsilon_0 \epsilon},$$

și φ_s este dat de condiția de neutralitate electrică în ansamblu.

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\infty} (n(x) - p(x)) dx = n_i \int_0^{\infty} \left(\exp \frac{q\varphi}{k_B \cdot T} - \exp \left(-\frac{q\varphi}{k_B \cdot T} \right) \right) dx = \\ &= \frac{n_i k_B \cdot T}{qE} \left[\exp \frac{q\varphi_s}{k_B \cdot T} + \exp \left(-\frac{q\varphi_s}{k_B \cdot T} \right) - 2 \right] \end{aligned}$$

Tinând cont de relația $q\varphi_s/k_B T \gg 1$ se obține,

$$\exp \frac{q\varphi_s}{k_B \cdot T} \approx \frac{q^2 N^2}{\epsilon_0 \epsilon \cdot k_B \cdot T n_i},$$

de unde rezultă variația lucrului de extracție,

$$\Delta\Phi = q\varphi_s = 0,32 \text{ eV.}$$

unde am presupus o probă de Ge ($n_i = 2,2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$, $\epsilon = 16$). Există deci o diferență de aproape două ordine de mărime între cele două rezultate. Aceasta este o consecință a faptului că lărgimea regiunii cu câmp electric nenul este mult mai mare în cazul adsorbției ionilor decât în cel al adsorbției moleculelor dipolare. Dimensiunea dipolului molecular este $l = d/q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$, iar lărgimea regiunii de sarcină spațială indusă de ioni pozitivi este $x_D = \phi / E = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$. În al doilea caz câmpul electric efectuează asupra electronilor un lucru mecanic mult mai mare decât în primul, chiar dacă el este mai puțin intens.

10.6- Să se găsească legătura dintre sarcina pe suprafață și potențialul de suprafață pentru un semiconductor care conține în volum impurități complet ionizate. Se va considera $\phi(0) = \phi_s > 0$.

Soluție

Ecuatia Poisson și condițiile la limită asociate au forma,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0\epsilon}; \quad \rho = q[p(x) - n(x) + N_d - N_a];$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \rightarrow 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} \rightarrow 0 \end{array} \right|_{x \rightarrow \infty}, \quad \varphi = \varphi_s > 0 \Big|_{x \rightarrow 0}.$$

În volumul semiconductorului sunt valabile relațiile,

$$\frac{n}{n_i} = \frac{n_i}{p} = \gamma,$$

$$n - p = N_d - N_a,$$

$$p(x) = p \exp\left(-\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right) \quad n(x) = n \exp\left(\frac{q\phi(x)}{k_B \cdot T}\right)$$

astfel încât ecuația Poisson devine,

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{n_i \cdot q^2}{\epsilon_0 \epsilon \cdot k_B \cdot T} \left[\gamma \cdot (1 - e^\psi) + \gamma^{-1} (e^{-\psi} - 1) \right],$$

unde am introdus notația $\psi = q\phi/k_B T$. Multiplicând cu $2\psi'(x)$ și integrând cu condițiile la limită de mai sus, rezultă,

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \frac{1}{L_D} \left[\gamma \cdot (1 - e^\psi) + \gamma^{-1} (e^{-\psi} - 1) + (\gamma^{-1} - \gamma) \cdot \psi \right]^{1/2};$$

$$L_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon \cdot k_B \cdot T}{2n_i \cdot q^2}}.$$

Semnul "+" nu-i acceptabil, întrucât $\phi'(x) < 0$. Apoi,

$$\epsilon_0 \epsilon E|_{x=0} = Q_s, \quad E|_{x=0} = -\frac{d\phi}{dx}|_{x=0},$$

deci,

$$E|_{x=0} = \frac{k_B \cdot T}{qL_D} \left[\gamma \cdot \left(\exp \frac{q\phi_s}{k_B \cdot T} - 1 \right) + \gamma^{-1} \left(\exp \left(-\frac{q\phi_s}{k_B \cdot T} \right) - 1 \right) + (\gamma^{-1} - \gamma) \frac{q\phi_s}{k_B \cdot T} \right]^{1/2}.$$

$$Q_s = 2qn_i L_D \left[\gamma \cdot \left(\exp \frac{q\phi_s}{k_B \cdot T} - 1 \right) + \gamma^{-1} \left(\exp \left(-\frac{q\phi_s}{k_B \cdot T} \right) - 1 \right) + (\gamma^{-1} - \gamma) \frac{q\phi_s}{k_B \cdot T} \right]^{1/2}.$$

10.7- Să se determine viteza de recombinare la suprafață s pentru o plachetă semiconductoare subțire de tip n. Lungimea și lățimea plachetei sunt mult mai mari decât grosimea ei $2a=0,5\text{mm}$, vitezele de recombinare superficială sunt aceleași pe cele două fețe, timpul de viață efectiv al purtătorilor de neechilibru în plachetă este $\tau_1=125\ \mu\text{s}$, iar timpul de viață în volum (măsurat pe o probă groasă) este $\tau_p=250\ \mu\text{s}$. Se va considera $as/D_p \ll 1$.

Soluție

După îndepărtarea sursei luminoase, relaxarea concentrației de neechilibru este descrisă de ecuația de continuitate,

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p} - \text{div } \vec{j}_p,$$

$$\vec{j}_p = -D_p \vec{\nabla} \Delta p;$$

$$D_p \frac{d \Delta p}{dx} = \bar{v} s \cdot \Delta p \Big|_{x=0} \dots$$

axa Ox fiind perpendiculară pe suprafața plachetei. Dimensiunile în planul xy fiind mari, vom neglija efectele de margine (ceea ce revine la a considera doar dependența de x a mărimilor analizate). Pentru rezolvarea ecuației de mai sus se va utiliza metoda separării variabilelor,

$$\Delta p = \varphi(t) \cdot \psi(x);$$

$$\frac{d\varphi}{dt} \psi = D_p \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi - \frac{\varphi \cdot \psi}{\tau_p};$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\tau_p} = D_p \frac{d^2 \psi}{dx^2} \cdot \frac{1}{\psi} = \text{const.}$$

Notăm această constantă $-1/\tau_1$ și introducem notația,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_s},$$

astfel încât ecuația dependentă de timp devine,

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\tau} = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Ecuația dependentă de x conduce la,

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\psi}{\tau_s \cdot D_p} = 0;$$

$$\psi(x) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_s \cdot D_p}}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_s \cdot D_p}}\right)$$

Soluția trebuie să fie simetrică relativ la punctul $x=0$ (ales la jumătatea grosimii placchetei), căci viteza de recombinare superficială este aceeași pe ambele fete. Deci $B=0$ și introducând soluția obținută în condiția la limită considerată rezultă ecuația,

$$\frac{a}{\sqrt{\tau_s \cdot D_p}} \tan\left(\frac{a}{\sqrt{\tau_s \cdot D_p}}\right) = \frac{sa}{D_p}.$$

ce are soluțiile $\tau_{s1} > \tau_{s2} > \tau_{s3} > \dots$. Prin urmare soluția căutată este,

$$\Delta p(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cdot \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_{sj} \cdot D_p}}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right),$$

și termenii corespunzători rădăcinilor τ_{s_j} de ordin mare scad în timp mai repede decât cel ce corespunde lui τ_{s_1} . Pentru timpi nu prea mici (după începutul procesului de tranziție) pot fi neglijați toți termenii din relația precedentă, cu excepția primului,

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_{s_1}}$$

Dacă $sa/D_p \ll 1$ ecuația pentru τ_{s_1} poate fi transformată după cum urmează,

$$\tan\left(\frac{a}{\sqrt{\tau_{s_1} \cdot D_p}}\right) \cong \frac{a}{\sqrt{\tau_{s_1} \cdot D_p}} \Rightarrow \frac{a^2}{\tau_{s_1} \cdot D_p} = \frac{sa}{D_p},$$

deci,

$$s = \frac{a}{\tau_{s_1}} = a \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_p} \right) = 100 \text{ cm/s.}$$

10.8- Să se determine viteza de recombinare superficială s_1 pe fața superioară a unei plachete subțiri de semiconductor de tip n. Lungimea și lățimea plachetei sunt mult mai mari decât grosimea ei, egală cu $2a=0,2$ mm, viteza de recombinare superficială pe fața inferioară s_2 este mult mai mică decât s_1 , timpul de viață efectiv al purtătorilor de neechilibru este $\tau_1=20$ μ s, iar timpul de viață în volum, măsurat pe o probă groasă, este $\tau_0=100$ μ s. Se va considera $s_1 a/D_p \ll 1$.

Soluție

Relaxarea concentrației de neechilibru după îndepărtarea sursei de fotogenerare este descrisă de ecuația,

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -\frac{\Delta p}{\tau_p} - \operatorname{div} \vec{j}_p, \quad \vec{j}_p = -D_p \vec{\nabla} \Delta p;$$

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} = -s_1 \cdot \Delta p \Big|_{x=a};$$

$$D_p \frac{d\Delta p}{dx} = s_2 \cdot \Delta p \Big|_{x=-a}.$$

Utilizând metoda separării variabilelor, ca în problema precedentă, se obține soluția,

$$\Delta p(x, t) = (A \cos \alpha \cdot x + B \sin \alpha \cdot x) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right);$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tau_s \cdot D_p}}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_s},$$

care introdusă în condițiile la limită conduce la,

$$\begin{cases} A(-\eta \cdot \tan \eta + k_1) + B(k_1 \tan \eta + \eta) = 0 \\ A(\eta \cdot \tan \eta - k_2) + B(k_2 \tan \eta + \eta) = 0 \end{cases};$$

$$\eta = \alpha \cdot a, \quad k_1 = \frac{s_1 \cdot a}{D_p}, \quad k_2 = \frac{s_2 \cdot a}{D_p}.$$

Acest sistem omogen admite soluții nenule doar dacă determinantul său este nul, adică:

$$\tan^2 \eta + 2 \frac{\eta - k_1 \cdot k_2}{\eta \cdot (k_1 + k_2)} \tan \eta - 1 = 0.$$

Fie $\eta_1 < \eta_2 < \dots$ soluțiile ecuației precedente (în număr infinit). Soluția generală a ecuației de continuitate va fi,

$$\Delta p(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \cdot \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_{sj} \cdot D_p}}\right) + B_j \cdot \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\tau_{sj} \cdot D_p}}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right)$$

Menținem doar termenul cel mai lent variabil în timp, corespunzător lui η_1 (termen dominant în expresia lui D_p pentru timpi de viață nu prea mici),

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_{s1}}, \quad \tau_{s1} = \frac{a^2}{\eta_1^2 D_p}$$

Vom examina cazul $\eta_1 \ll p/2$ (adică $k_{1,2} \ll 1$ sau $as_{1,2}/D_p \ll 1$). Atunci $\text{tg } \eta_1 \sim \eta_1$ și ecuația pentru η devine,

$$\eta_1^2 = \frac{k_1 + 2k_1 \cdot k_2 + k_2}{k_1 + k_2 + 2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{D_p}{a^2} \cdot \frac{s_1 + s_2 + 2s_1 \cdot s_2 \cdot \frac{a}{D_p}}{s_1 + s_2 + 2 \frac{D_p}{a}} \cong \frac{1}{\tau_p} + \frac{s_1 + s_2}{2a}$$

Dacă $s_1 \gg s_2$ atunci,

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{s_1}{2a} \Rightarrow s_1 = 800 \text{ cm / s.}$$

10.9. Să se găsească dependența vitezei de recombinare superficială s de mărimea γ_s , care caracterizează curbura benzilor la suprafața unui semiconductor, $\psi_s = F \cdot E_i \cdot \phi_s$, $E_i = (E_c + E_v)/2$. Concentrația superficială a centrilor care participă la recombinare este N_p , energia nivelelor lor este E_p , concentrațiile în exces în volum, în vecinătatea regiunii de sarcină spațială sunt identice ($D_n = D_p$ la $x = x_j$). Se consideră: semiconductorul nedegenerat; abateri mici de la echilibru $\Delta p \ll n_0$; cazul staționar.

Soluție

Rata de captură a electronilor pe centrii de la suprafață este dată de expresia:

$$R_n = N_t \cdot c_n \cdot [(1 - f_t)n_s - n_{s1}f_t],$$

unde f_t este fracțiunea de centri ocupați cu electroni, n_s este concentrația electronilor liberi la suprafața semiconductorului, n_{s1} este concentrația electronilor la suprafață când nivelul Fermi coincide cu E_t , iar c_n este coeficientul de captură. Similar pentru goluri se obține, în valoare absolută,

$$R_p = N_t \cdot c_p \cdot [f_t p_s - p_{s1} \cdot (1 - f_t)].$$

În caz staționar $R_n = R_p = R$, de unde rezultă f_t care înlocuit în expresia lui R conduce la,

$$R = N_t \frac{c_n \cdot c_p \cdot (p_s \cdot n_s - p_{s1} \cdot n_{s1})}{c_n (n_s + n_{s1}) + c_p (p_s + p_{s1})},$$

$$p_s = p_{s0} + \Delta p_s = p_{s0} \exp\left(-\frac{qF_p}{k_B \cdot T}\right);$$

$$n_s = n_{s0} + \Delta n_s = n_{s0} \exp\left(\frac{qF_n}{k_B \cdot T}\right)$$

$$p_{s0} = n_i \exp\left(-\frac{q\psi_s}{k_B \cdot T}\right) \quad n_{s0} = n_i \exp\left(\frac{q\psi_s}{k_B \cdot T}\right)$$

F_n și F_p sunt cvasinivelele Fermi, iar indicele "0" desemnează valorile de echilibru. Avem apoi,

$$p_{s1} = n_i \exp\left(\frac{E_t - E_i}{k_B \cdot T}\right) \quad n_{s1} = n_i \exp\left(-\frac{E_t - E_i}{k_B \cdot T}\right)$$

$$n_{s,1} \cdot p_{s,1} = n_i^2$$

care asociate cu $n, p = np$ (ipoteza de cvasiechilibru în zona de sarcină spațială de la suprafață) conduc la,

$$R = N_i \frac{c_n \cdot c_p \cdot (pn - n_i^2)}{c_n (n_{s,0} + \Delta n_s + n_{s,1}) + c_p (p_s + \Delta p_s + p_{s,1})}$$

La nivel mic de injecție expresia precedentă capătă forma,

$$R \cong N_i \frac{c_n \cdot c_p \cdot (p_0 + n_0) \Delta n}{c_n (n_{s,0} + n_{s,1}) + c_p (p_s + p_{s,1})}$$

Introducând notația,

$$\frac{c_p}{c_n} = \exp \frac{2q\psi_0}{k_B \cdot T}$$

și având în vedere că $s = R/\Delta n$, obținem,

$$s = N_i \sqrt{c_n \cdot c_p} \frac{p_0 + n_0}{2n_i} \cdot \frac{1}{\cosh \frac{E_i - E_s - q\psi_0}{k_B \cdot T} + \cosh \frac{q(\psi_s - \psi_0)}{k_B \cdot T}}$$

10.10. Intensitatea câmpului electric într-un strat îmbogățit din vecinătatea suprafeței unui semiconductor este 10^5 V/cm. Să se estimeze energia nivelului cel mai adânc în groapa de potențial triunghiulară care limitează mișcarea electronilor în direcția perpendiculară pe suprafață. Masa efectivă a electronilor este $0,2m_0$

Soluție

Existența unui câmp electric determină curbarea benzilor energetice în vecinătatea suprafeței și apariția gropii de potențial menționate (Fig. 21).

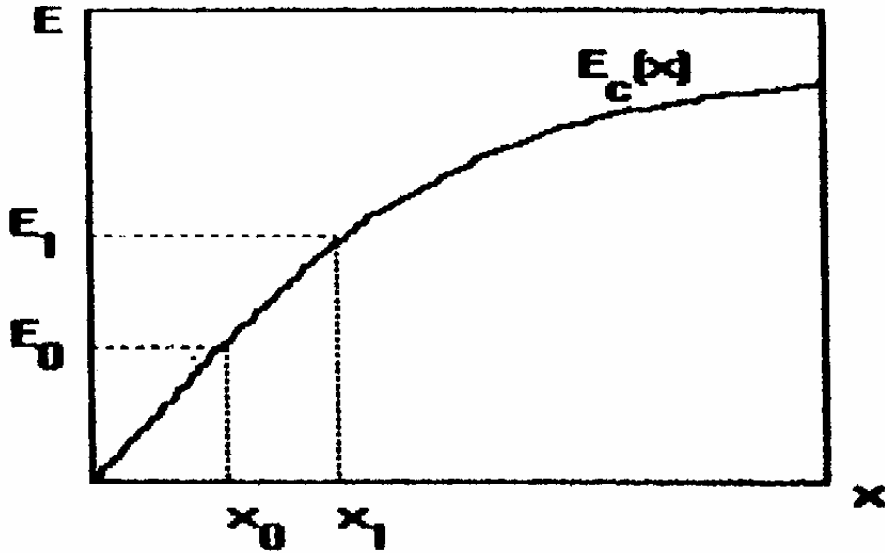


Fig. 21

Nivelele energetice E_n se pot găsi, de exemplu, utilizând condițiile de cuantificare cuasiclasice,

$$\int_0^x k_n(x) dx = (n + 3/4) \cdot \pi .$$

Am notat,

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E_n - E_c(x))};$$
$$E_c(x) = q E x ,$$

$E_c(x)$ fiind energia potențială ce apare în ecuația Schrödinger, x_n este determinat de ecuația $E_n = E_c(x_n)$. Calculând integrala, se obține,

$$\int_0^{x_n} \sqrt{E_n - E_c(x)} dx = \frac{1}{qE} \int_0^{E_n} \sqrt{E_n - E_c} dE_c = \frac{2}{3qE} E_n^{3/2},$$

de unde,

$$E_n = \left(\frac{3(4n+3) \cdot \pi}{8} \right)^{2/3} qE \left(\frac{\hbar^2}{2mqE} \right)^{1/3}$$

Energia stării fundamentale este deci,

$$E_0 = \left(\frac{9 \cdot \pi}{8} \right)^{2/3} qE \left(\frac{\hbar^2}{2mqE} \right)^{1/3} \cong 62 \text{ meV.}$$

Dimensiunea gropii de potențial pe care o "simte" electronul cu energia E_0 este $x_0 = E_0 / qE = 60 \text{ \AA}$

11. EFECTUL FOTOVOLTAIC ÎN SEMICONDUCTORI

11.1- Să se determine tensiunea foto-electromotoare (t.f.e.m.) într-un semiconductor cu conducție monopolară, la un grad arbitrar de degenerare.

Soluție

Efectul fotovoltaic se manifestă la iluminarea unui semiconductor neomogen. Vom examina pentru simplitate doar cazul unidimensional, când atât concentrațiile de echilibru n_0 și p_0 cât și cele de neechilibru D_n și D_p depind doar de coordonata x . În acest caz t.f.e.m. este dată de expresia,

$$V = \oint \frac{D_p \frac{dp}{dx} - D_n \frac{dn}{dx}}{n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p} d\vec{l} = \frac{k_B \cdot T}{q} \oint \frac{\frac{dp}{dx} - b \frac{dn}{dx}}{nb + p} d\vec{l}; \quad b = \frac{\mu_n}{\mu_p},$$

unde integrarea se face pe un drum închis conținut în probă. Am presupus valabilă relația lui Einstein $D_{p,n} = (k_B T/q) \mu_{n,p}$. Dacă semiconductorul este monopolar, de exemplu $p \gg n$, expresia precedentă se reduce la,

$$V = \oint \frac{D_p}{\mu_p \cdot p} \cdot \frac{dp}{dx} dx = \oint \frac{D_p}{\mu_p \cdot p} dp.$$

Integrandul este o funcție univocă de p și integrala pe contur este identic nulă. Acest rezultat atestă caracterul esențial bipolar al t.f.e.m.

11.2 - Să se calculeze t.f.e.m. într-o probă de n-Ge la $T=300$ K, dacă partea ei centrală este iluminată (Fig. 22) astfel încât în ea $\Delta\sigma=0,2 \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$, iar în

afara ei $\Delta\sigma=0$. În absența iluminării rezistivitatea în secțiunea A este $r_{0A}=15 \Omega \cdot \text{cm}$, iar în secțiunea B $r_{0B}=5 \Omega \cdot \text{cm}$.

Soluție

Vom determina separat termenii din t.f.e.m. totală datorati neomogeneității probei V_1 și, respectiv, neomogeneității concentrațiilor în exces V_2 .

$$V = V_1 + V_2;$$

$$V_1 = \frac{k_B \cdot T}{q} \int \frac{1+b}{bn+p} \Delta n \frac{d \ln n_0}{dx} dx = \frac{k_B \cdot T}{q} \int_A^B \frac{b+1}{bn_0 + (b+1)\Delta n} \cdot \frac{\Delta n}{n_0} \frac{dn_0}{dx} dx \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{0A}}}{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{0B}}}$$

$$V_2 = \frac{k_B \cdot T}{q} \int \frac{1-b}{bn+p} \frac{d\Delta n}{dx} dx$$

Acest ultim termen îl calculăm separând în două integrale pe două porțiuni înguste de lățime 2ϵ în apropiere de A și B, unde $d(\Delta n)/dx$ este nenulă,

$$V_2 = -\frac{k_B \cdot T}{q} \frac{b-1}{b+1} \left[\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + \frac{bn_0}{b+1}} + \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{d\Delta n}{\Delta n + \frac{bn_0}{b+1}} \right] = -\frac{k_B \cdot T}{q} \frac{b-1}{b+1} \ln \frac{1 + (b+1) \frac{\Delta n}{bn_{0A}}}{1 + (b+1) \frac{\Delta n}{bn_{0B}}}$$

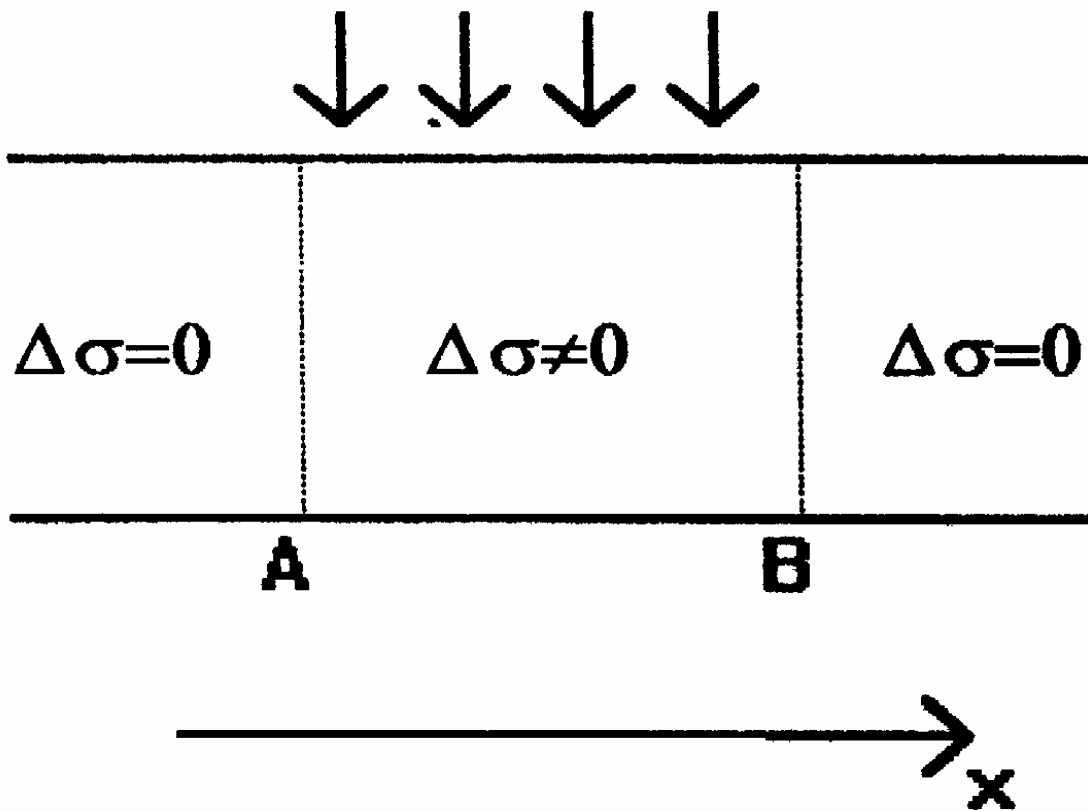


Fig.22

Deci,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2}{b+1} \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{0A}}}{1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{0B}}} = 1,17 \cdot 10^{-2} \text{ V.}$$

11.3 În condiții similare celor din problema precedentă, să se determine t.f.e.m. dacă $r_{0A}=10 \Omega \cdot \text{cm}$, $r_{0B}=8 \Omega \cdot \text{cm}$ și pentru două valori ale lui $\Delta\sigma$: $\Delta\sigma_1=0,01 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ și respectiv $\Delta\sigma_2=2 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$.

Soluție

Soluția problemei precedente arată că în cazul limită $\Delta\sigma/\sigma_0 \ll 1$ putem scrie,

$$V = \frac{2}{b+1} \frac{k_B \cdot T}{q} \Delta\sigma \cdot (\rho_{0A} - \rho_{0B}),$$

iar în cazul opus $\Delta\sigma/\sigma_0 \gg 1$:

$$V = \frac{2}{b+1} \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{\rho_{0A}}{\rho_{0B}}.$$

Deci,

$$\begin{cases} \Delta\sigma_1 \cdot \rho_{0A} = 0,1 \ll 1 \Rightarrow V' = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ V} \\ \Delta\sigma_2 \cdot \rho_{0B} = 16 \gg 1 \Rightarrow V'' = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ V} \end{cases}$$

11.4 O probă de n-Ge este iluminată pe o porțiune îngustă de lărgime $\Delta l = 0,1 \text{ mm}$ (Fig. 28) cu lumină ce generează $2,5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ perechi de purtători. În punctul $x=0$ rezistivitatea este $r(0) = 1 \text{ } \Omega \cdot \text{cm}$. La deplasarea sondei luminoase de-a lungul probei t.f.e.m. variază după legea,

$$V(x) = \frac{A}{1 + Bx},$$

unde $A = 3 \cdot 10^{-4} \text{ V}$, $B = 2 \text{ cm}^{-1}$. Să se determine r în punctul $x = 2 \text{ cm}$. Se dă $T = 300 \text{ K}$.

Soluție

Considerând că variația lui r pe distanța Δl este mică putem scrie,

$$\rho(x + \Delta x) = \rho(x) + \frac{d\rho}{dx} \Delta l.$$

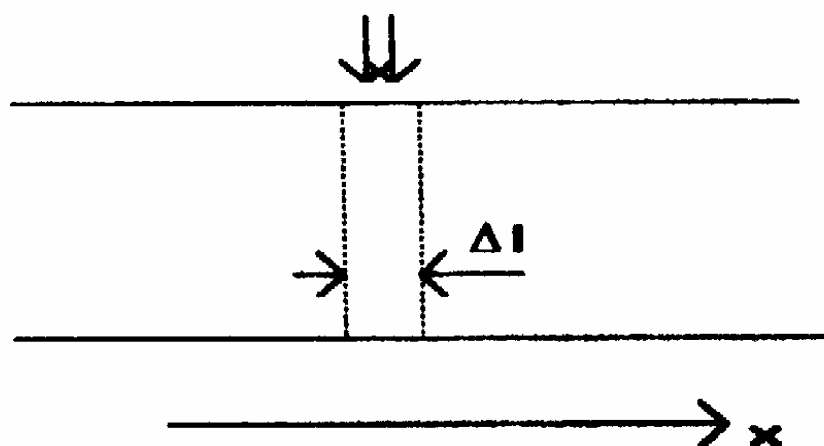


Fig. 23

Din formula pentru V din problema precedentă,

$$V = - \frac{2}{b+1} \cdot \frac{k_B \cdot T}{q} \cdot \frac{\Delta \sigma \cdot \Delta l \frac{d\rho}{dx}}{1 + \Delta \sigma \cdot \rho},$$

unde am făcut ipoteza că valoarea ultimului raport din expresia precedentă este mică. De aici,

$$\int_A^{\rho} \frac{\Delta \sigma \cdot d\rho}{1 + \Delta \sigma \cdot \rho} = \frac{A(b+1)q}{2k_B \cdot T \cdot \Delta l} \int_0^x \frac{dx}{1 + Bx} = C \ln(1 + Bx),$$

unde,

$$C = \frac{A}{B} \cdot \frac{(b+1)q}{2k_B \cdot T \cdot \Delta l} = 0,89.$$

Integrând după x găsim,

$$\rho(x) = \frac{[1 + \Delta \sigma \cdot \rho(0)](1 + Bx)^C - 1}{\Delta \sigma},$$

și $\Delta\sigma = \Delta n(b+1)q m_n = 4,7 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$. Deci $\rho(2 \text{ cm}) = 4,9 \Omega \text{ cm}$ și ipoteza făcută mai sus este valabilă.

11.5- Să se calculeze t.f.e.m. ce apare într-o joncțiune p-n cu Ge la 75K, în cazul unei perturbări uniforme (Fig.24). Se iluminează regiunea n adiacentă joncțiunii, în care $\Delta n = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, iar în exteriorul ei $\Delta n = 0$. În profunzimea regiunii n $n_0 = n_n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, în regiunea p $p_p = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $m_n = 3 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{V.s}$, $b = 0,5$.

Soluție

T.f.e.m. este termenul datorat neomogenității probei,

$$V_1 = \frac{k_B \cdot T}{q} \cdot \frac{b+1}{b} \Delta n \int_{n_0}^0 \frac{1}{n_0 + \frac{b+1}{b} \Delta n} \cdot \frac{dn_0}{dx} dx = \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{n_p \left(n_n + \frac{b+1}{b} \Delta n \right)}{n_n \left(n_p + \frac{b+1}{b} \Delta n \right)}$$

În condițiile date $n_i = 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$, $n_p = n_i^2 / n_n = 10^{29} \text{ cm}^{-3}$, $k_B T/q = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$, deci $V_1 = 0,11 \text{ V}$.

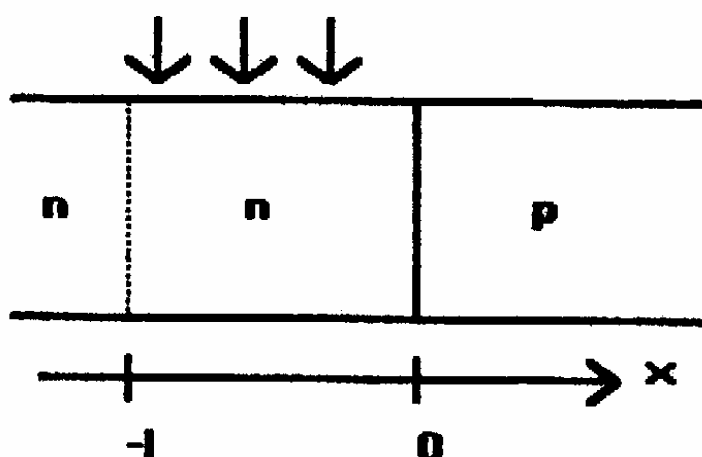


Fig. 24

11.6- Să se găsească diferența de potențial $\Delta\phi$ între capetele unei probe de tip n cu grosimea $d = 1 \text{ cm}$, dacă iluminarea capătului $x = 0$ induce concentrații de neechilibru de tipul,

$$\Delta n(x) = \Delta p(x) = N \exp\left(-\frac{x}{L}\right) \quad 0 \leq x \leq d,$$

unde $N=10^{15} \text{ cm}^{-3}$, $L=0,01 \text{ cm}$. Concentrația de echilibru a electronilor variază liniar de la $n_0'=5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ în punctul $x=0$, la $n_0''=4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ în $x=d$. Se dau $T=200 \text{ K}$, $b=2,1$.

Soluție

Cu notațiile,

$$n_0(x) = n_0'(1 - \xi \cdot x), \quad \xi = 0,2 \text{ cm}^{-1}$$

se obține,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{k_B \cdot T}{q} \int_0^d \frac{(1-b)N \left[-\frac{1}{L} \exp\left(-\frac{x}{L}\right) \right] + b \cdot \xi \cdot n_0'}{bn_0'(1 - \xi \cdot x)} dx = \\ &= \frac{k_B \cdot T}{q} \frac{b-1}{b} \frac{N}{n_0'} \int_0^d \frac{e^{-z}}{1 - \xi \cdot Lz} dz + \frac{k_B \cdot T}{q} \int_0^d \frac{\xi}{1 - \xi \cdot x} dx. \end{aligned}$$

În prima integrală $\xi L < 1$ și $xL = 0,003 < 1$, astfel încât putem scrie,

$$\Delta \varphi = \frac{k_B \cdot T}{q} \left(\frac{b-1}{b} \frac{N}{n_0'} + \ln \frac{1}{1 - \xi \cdot d} \right) = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

11.7- Să se calculeze t.f.e.m. în condițiile problemei 11.1, dar în prezența centrilor de captură, considerând $\tau_p/\tau_n = 10$.

Soluție

Având în vedere că în cazul de față $\Delta p = \Delta n \tau_p/\tau_n$, putem scrie,

$$V_1 = \frac{k_B \cdot T}{q} \int \frac{\frac{\tau_p}{\tau_n} + b}{b n_0 + \left(\frac{\tau_p}{\tau_n} + b \right) \Delta n} \cdot \frac{\Delta n}{n_0} \frac{d n_0}{d x} d x;$$

$$V_2 = \frac{k_B \cdot T}{q} \int \frac{\frac{\tau_p}{\tau_n} - b}{b n_0 + \left(\frac{\tau_p}{\tau_n} + b \right) \Delta n} \frac{d \Delta n}{d x} d x,$$

unde am folosit aceleași notații ca în problema 11.2. Dezvoltând calculele rezultă,

$$V_1 = \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{1 + \Delta \sigma \cdot \rho_{0A}}{1 + \Delta \sigma \cdot \rho_{0B}};$$

$$V_2 = \frac{\frac{\tau_p}{\tau_n} - b}{\frac{\tau_p}{\tau_n} + b} \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{1 + \Delta \sigma \cdot \rho_{0A}}{1 + \Delta \sigma \cdot \rho_{0B}};$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{2 \frac{\tau_p}{\tau_n}}{\frac{\tau_p}{\tau_n} + b} \cdot \frac{k_B T}{q} \cdot \ln \frac{1 + \Delta \sigma \cdot \rho_{0A}}{1 + \Delta \sigma \cdot \rho_{0B}} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ V.}$$

12. PROPRIETĂȚI OPTICE ALE SEMICONDUCTORILOR

12.1- La reflexia radiației cu $\lambda=100\mu\text{m}$ pe o probă semiconductoră groasă, coeficientul de reflexie are valoarea $R=0,86$. Coeficientul de transmisie al unei pelicule de grosime $d=1\text{ mm}$ din același material s-a dovedit a fi $T=0,17$. Se cere coeficientul de absorbție γ .

Soluție

Proprietățile optice ale unui material sunt caracterizate de indicele de refracție $n(\omega)$ și de coeficientul de absorbție liniară $\gamma(\omega)$. Se știe că acestea sunt legate de conductivitatea complexă $\sigma(\omega)$ a materialului (dacă se neglijează proprietățile magnetice: $\mu_r=1$) prin relația,

$$(n + i\kappa)^2 = \epsilon + \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \cdot \omega}, \quad \kappa = \frac{\sigma \cdot \gamma}{2\omega} = \frac{\lambda \cdot \gamma}{4\pi}$$

unde ϵ este permitivitatea dielectrică în absența purtătorilor de sarcină liberi. La incidență normală a luminii pe o probă groasă, dintr-un mediu cu $n=1$, coeficientul de reflexie este dat de,

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}$$

Coeficientul de transmisie al unui strat semiconductor de grosime finită d , plasat într-un mediu cu $n=1$, este dat de expresia,

$$T = \frac{(1-R)^2 \left[1 + \left(\frac{\kappa}{n} \right)^2 \right]}{\left[\exp \frac{\gamma \cdot d}{2} - R \cdot \exp \left(-\frac{\gamma \cdot d}{2} \right) \right]^2 + 4R \sin^2 \left(\zeta + \frac{2\pi \cdot nd}{\lambda} \right)}$$

unde λ este lungimea de undă a radiației incidente în vid, iar faza ζ este dată de formula,

$$\zeta = \arctan \frac{2\kappa}{n^2 + \kappa^2 - 1}$$

Termenul în "sin²" de la numitorul relației precedente este datorat posibilelor efecte interferențiale. În absența lor (suprafețe neparalele, lumină nemonocromatică) T este,

$$T = \frac{(1-R)^2 \left[1 + \left(\frac{\kappa}{n} \right)^2 \right]}{\exp(\gamma \cdot d) - R^2 \cdot \exp(-\gamma \cdot d)}$$

În condițiile precizate în enunț, putem presupune $\kappa \ll n$. Cunoscând R , din cele de mai sus rezultă $n=4$. În aceleași condiții expresia pentru T se scrie,

$$T = \frac{(1-R)^2 \exp(-\gamma \cdot d)}{1 - R^2 \cdot \exp(-2\gamma \cdot d)}$$

Punând $x = \exp(\gamma d)$ se obține ecuația,

$$x^2 + x \frac{(1-R)^2}{R^2 T} - \frac{1}{R^2} = 0 \Rightarrow x = 0,48 \Rightarrow \gamma = 7,3 \text{ cm}^{-1}$$

12.2- Să se găsească mărimile cvasivectorilor de undă ale electronilor și golurilor create prin absorbția unei cuante kv într-un semiconductor cu benzi

energetice directe și cu legi de dispersie parabolice și izotrope. Să se estimeze gradul de neverticalitate al tranziției, comparând rezultatul cu vectorul de undă q al fotonului absorbit. Se va considera $E_g=0,8 \text{ eV}$, $m_n=m_p=0,4m_0$, $h\nu=0,81\text{eV}$, $n=4$.

Soluție

Cvasivectorul de undă al particulelor create poate fi estimat din,

$$\hbar\omega = E_c(\vec{k}) - E_v(\vec{k}) \Rightarrow k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_{opt}(\hbar\omega - E_g)} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1},$$

unde m_{opt} este o combinație a maselor efective, care în cazul legilor de dispersie parabolice este dată de,

$$m_{opt} = m_r = \left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_p} \right)^{-1} = 0,05m_0.$$

Se obține $k=1,2 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1}$. În mediul considerat,

$$q = \frac{n\omega}{c} = 6,6 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \frac{q}{k} = 5,5 \cdot 10^{-2}.$$

În consecință putem considera că tranziția este verticală cu o bună aproximație ($q/k \ll 1$).

12.3- Aceeași problemă ca mai sus, dar $h\nu=0,2\text{eV}$, $n=3,3$, $E_g=0,18\text{eV}$ și legea de dispersie de tip,

$$E(\vec{k}) = E_c + \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{E_s^2 + \frac{2\hbar^2 k^2}{m(0)} E_s} - E_s \right),$$

cu $m(0)=0,015m_0$ semnul "+" corespunde benzii de conducție, semnul "-" corespunde benzii de valență.

Soluție

Ca mai sus k este estimat din relația ce exprimă conservarea energiei,

$$\hbar\omega = E_c(\vec{k}) - E_v(\vec{k}) \Rightarrow k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m(0) \frac{(\hbar\omega)^2 - E_g^2}{2E_g}} = 6,5 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1}.$$

Apoi,

$$q = \frac{n\omega}{c} = 3,35 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$$

și gradul de neverticalitate al tranziției,

$$\frac{q}{k} = 5,2 \cdot 10^{-3}.$$

12.4 Să se determine energia particulelor generate prin absorbția unei cuante $\hbar\nu > E_g$ într-un semiconductor cu banda de valență degenerată. Legile de dispersie sunt parabolice și izotrope, cu masa efectivă a electronilor $m_n = 0,05m_0$ și masele efective ale golurilor grele și ușoare $m_{pg} = 0,12m_0$, $m_{pu} = 0,5m_0$. Se va considera $E_g = 1,48\text{eV}$, $\hbar\nu = 1,5\text{eV}$.

Soluție

În cazul generării golurilor ușoare trebuie considerată expresia,

$$m_{pt} = \left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{pu}} \right)^{-1} = 0,035m_0.$$

Determinând, cu neglijarea non-verticalității tranziției, mărimea vectorului de undă al electronilor și respectiv, al golurilor ușoare ca în problema precedentă găsim,

$$E_n = \frac{m_{pt}}{m_n} (\hbar\omega - E_g) = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ eV},$$

$$E_{pl} = \frac{m_{rl}}{m_{pl}} (\hbar \omega - E_g) = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ eV.}$$

Similar, la generarea golurilor grele se obțin $m_n = 0,045 m_0$, $E_n = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$, $E_{ph} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$.

12.5- Să se calculeze densitatea de stări combinată pentru banda de conducție și banda de valență a golurilor ușoare, descrise de legea de dispersie din problema 13.3.

Soluție

Se știe că pentru tranziții directe permise coeficientul de absorbție a luminii este dat de expresia,

$$\gamma = \frac{2(2\pi)^2 q^2 |P_{cv}|^2}{3m_0^2 \omega (\epsilon_0 \epsilon_1)^{1/2}} \rho_{comb}(\omega),$$

unde ϵ_1 este partea reală a permitivității la frecvența ω , P_{cv} este elementul de matrice al operatorului impuls între stările cu același vector de undă din BV și BC, iar $\rho_{comb}(\omega)$ este densitatea de stări combinată,

$$\rho_{comb}(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{ZB} d\vec{k} \cdot \delta [E_c(\vec{k}) - E_v(\vec{k}) - \hbar\omega].$$

Pentru simplificare, în condițiile din enunț introducem notația,

$$a^2 = \frac{2\hbar^2 E_g}{m(0)},$$

astfel încât legile de dispersie se scriu,

$$E_{n,p}(\vec{k}) = E_c + \frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{E_g^2 + a^2 k^2} - E_g \right),$$

unde semnele "+" și "-" crespund respectiv BC și BV. Alegem ca nivel de referință pentru energii minimul BC ($E_c = 0$). Atunci expresia pentru $\rho_{comb}(\omega)$ devine, după trecerea la coordonate polare în spațiul k ,

$$\rho_{comb,l} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 \delta(\sqrt{E_g^2 + a^2 k^2} - \hbar\omega) dk.$$

Indicele l arată că sunt examinate aici BC și BV a golurilor ușoare. Utilizând formula de integrare a funcției δ ,

$$\int_a^b f(x) \delta[\varphi(x)] dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

valabilă dacă $f(x)$ este continuă și diferențiabilă, cu zerourile simple x_i , $a < x_i < b$, se obține,

$$\rho_{comb,l}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{m(0)}{2E_g} \right)^{3/2} \sqrt{\hbar^2 \omega^2 - E_g^2}.$$

Când $\hbar v \sim E_g$ se obține aceeași dependență de v ca în cazul legilor de dispersie parabolice cu masa efectivă $m(0)$ pentru electroni și goluri,

$$\rho_{comb,l}(\omega) \propto (\hbar\omega - E_g)^{1/2}.$$

Dacă $\hbar v \gg E_g$ se obține,

$$\gamma \propto \rho_{comb,l}(\omega) \propto \omega^2.$$

Acesta este cazul $E_g \sim 0$.

12.6- Să se calculeze densitatea de stări combinată pentru BC descrisă de legea de dispersie

$$E(\vec{k}) = E_c + \frac{1}{2} \left(\sqrt{E_s^2 + \frac{2\hbar^2 k^2}{m(0)} E_s} - E_s \right)$$

și BV descrisă de legea de dispersie,

$$E(\vec{k}) = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$$

Se va considera $m_0 \gg m(0)$ și $\hbar\omega - E_s \ll E_s m_0 / m(0)$. Să se compare cu rezultatul problemei precedente.

Soluție

Punând,

$$a^2 = \frac{2\hbar^2 E_s}{m(0)}$$

și procedând ca mai sus, obținem,

$$\rho_{comb,h}(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} k^2 \delta \left(\frac{E_s}{2} + \sqrt{E_s^2 + a^2 k^2} - \hbar\omega + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \right) dk,$$

unde indicele h indică ramura golurilor grele. Inegalitățile indicate în enunț permit să neglijăm ultimul termen între paranteze, ceea ce conduce la,

$$\rho_{comb,h}(\omega) = \frac{[2m(0)]^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{\hbar\omega(\hbar\omega - E_s)}{E_s} \right]^{1/2} \left(\frac{\hbar\omega}{E_s} - \frac{1}{2} \right)$$

Comparând cu expresia din problema precedentă, găsim,

$$\frac{\rho_{comb,h}(\omega)}{\rho_{comb,l}(\omega)} = 8 \left(\frac{\hbar\omega}{E_s} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\hbar\omega}{E_s} \left(\frac{\hbar\omega}{E_s} + 1 \right) \right]^{1/2}$$

13. TEHNOLOGIA SEMICONDUCTORILOR

13.1- Să se arate că, atunci când se formează un strat de bioxid de siliciu de grosime x_0 , se consumă un strat de Si de grosime $0,455x_0$. Se dau $\rho_{Si}=2,33\text{g/cm}^3$, $\rho_{SiO_2}=2,27\text{g/cm}^3$

Soluție

Fie x grosimea stratului de Si consumat în reacția de oxidare. Numărul atomilor de Si conținuți în acest strat anterior oxidării trebuie să fie egal cu numărul moleculelor de SiO_2 rezultate din reacție. Deci putem scrie,

$$N_A \frac{Sx \cdot \rho_{Si}}{A_{Si}} = N_A \frac{Sx_0 \cdot \rho_{SiO_2}}{A_{SiO_2}}$$

unde N_A este numărul lui Avogadro, A este masa atomică (masă moleculară în cazul SiO_2), ρ este densitatea de masă, iar S este suprafața plăcii. Înlocuind valorile numerice, se obține,

$$x = \frac{\rho_{SiO_2}}{\rho_{Si}} \cdot \frac{A_{Si}}{A_{SiO_2}} \cdot x_0 = 0,455x_0$$

13.2- Să se calculeze fluxul de oxidant și timpul necesar pentru a crește un strat monomolecular de SiO_2 în oxigen uscat la 1200°C , dacă grosimea inițială a oxidului este $0,2\ \mu\text{m}$. Se dau $N_1=2,3 \cdot 10^{22}\text{cm}^{-3}$ (dacă oxidarea se face în O_2 uscat), $B=4,56\ \mu\text{m}^2/\text{h}$, $B/A=1\ \mu\text{m}/\text{h}$.

Soluție

Fluxul de oxidant este dat de relația cunoscută,

$$F = \frac{BN_1}{A + 2x_0} = 2,35 \cdot 10^9 \mu\text{m}^2\text{h}^{-1},$$

unde N_1 este numărul de molecule de oxidant necesar pentru formarea unei unități de volum de oxid, iar A și B sunt cele două constante ce apar în ecuația ce descrie evoluția în timp a grosimii stratului de oxid, în modelul cinetic al lui Grove.

Timpul necesar pentru creșterea unui strat de oxid de grosime Δx_0 peste unul de grosime x_i se obține din relația generală pentru variația grosimii oxidului în funcție de timp,

$$t = \frac{\Delta x_0}{B} (\Delta x_0 + 2x_i + A).$$

Grosimea unui strat monomolecular de SiO_2 este dată aproximativ de,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{N_1}} = 3,52 \cdot 10^{-4} \mu\text{m},$$

și înlocuind în relația precedentă se obține $t \approx 12,99$ a.

13.3- O plachetă de Si este acoperită cu un strat de oxid de grosime $0,2\mu\text{m}$. Care este timpul necesar pentru a crește un strat suplimentar de SiO_2 de $0,1 \mu\text{m}$ în oxigen uscat la 1200°C ?

Soluție

Timpul cerut este dat de relația generală ce descrie grosimea stratului de oxid ca funcție de timp în modelul cinetic al lui Grove,

$$t = \frac{\Delta x_0}{B} (\Delta x_0 + 2x_i + A).$$

Valorile constantelor ce apar sunt cele indicate în problema precedentă, astfel că după înlocuirea valorilor numerice se obține $t \approx 1,2$ h.

13.4- Să se determine relația pentru oxidarea termică în cazul în care legea lui Henry nu este verificată la interfața oxid-siliciu. Se va presupune concentrația de oxidant la suprafața exterioară a oxidului proporțională cu rădăcina pătrată a presiunii parțiale a oxidantului în gazul din vecinătatea suprafeței oxidului.

Soluție

Etapele sunt identice celor întâlnite în analiza lui Grove, exceptând expresia pentru fluxul agentului oxidant în fază gazoasă care în cazul de față este dat de,

$$F_1 = \frac{h_G}{k_B \cdot T} (p_G - p_s) = \frac{h_G}{H_1^2 \cdot k_B \cdot T} (C^{*2} - C_0^2),$$

unde s-a ținut cont de indicația din enunț,

$$C^* = H_1 \sqrt{p_G} ; C_0 = H_1 \sqrt{p_s},$$

H_1 fiind o constantă. Condiția de staționaritate $F_1 = F_2 = F_3 = F$ capătă forma,

$$\frac{h_G}{H_1^2 \cdot k_B \cdot T} (C^{*2} - C_0^2) = \frac{D}{x_0} (C_0 - C_1) = k_s C_1.$$

Rezolvând sistemul precedent în raport cu C_1 , se obține ecuația,

$$\left(1 + \frac{k_s x_0}{D}\right)^2 C_1^2 + \frac{k_s}{h} C_1 - C^{*2} = 0.$$

în care pentru simplitatea scrierii am introdus notația,

$$h = \frac{h_G}{H_1^2 \cdot k_B \cdot T}.$$

Analiza ulterioară devine simplă în cazurile limită ale difuziei infinit rapide și, respectiv, al unei viteze de reacție infinite.

a) Difuzie infinit de rapidă,

$$D \rightarrow \infty \Rightarrow C_0 = C_1;$$

$$C_1^2 + \frac{k_s}{h} C_1 - C^{*2} = 0.$$

Rezolvând ecuația precedentă și introducând rezultatul în ecuația ce descrie evoluția în timp a grosimii stratului de oxid,

$$N_1 \frac{dx_0}{dt} = F,$$

se obține,

$$N_1 \frac{dx_0}{dt} = \frac{k_s}{2} \left[-\frac{k_s}{h} + \sqrt{\left(\frac{k_s}{h}\right)^2 + 4C^{*2}} \right] = \text{const.}$$

Prin urmare în această limită rezultă o creștere liniară în timp a grosimii oxidului.

b) Viteză de reacție infinită,

$$k_s \rightarrow \infty \Rightarrow C_i = 0,$$

$$C_0 = \frac{1}{2} \left[-\frac{D}{hx_0} + \sqrt{\left(\frac{D}{hx_0}\right)^2 + 4C^{*2}} \right] \approx C^*.$$

și deci,

$$N_1 \frac{dx_0}{dt} = \frac{D}{x_0} C_0 = \frac{D}{x_0} C^*.$$

Grosimea oxidului variază deci în timp după o lege parabolică în situația considerată.

Problema se complică în cazul general, când trebuie reținută ecuația

$$N_1 \frac{dx_0}{dt} = - \frac{2k_s C^{*2}}{\frac{k_s}{h} + \sqrt{\left(\frac{k_s}{h}\right)^2 + 4C^{*2} \left(1 + \frac{k_s x_0}{D}\right)^2}}.$$

din rezolvarea căreia se obține dependența $x_0(t)$.

13.5- Să se determine ecuația de transport în cazul difuziei unei specii ce se consumă într-o reacție chimică. Se va presupune că viteza acestei reacții este proporțională cu concentrația speciei respective în fiecare punct.

Soluție

Ecuția de transport este dată de prima legea difuziei (Fick),

$$\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Expresia fluxului, în condițiile precizate în enunț și considerând că specia transportată este încărcată pozitiv, este

$$F = -D \frac{\partial C}{\partial x} + \mu \cdot EC - k_s C.$$

Cele două relații precedente conduc la,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - (\mu \cdot E - k_s) \frac{\partial C}{\partial x},$$

în care am considerat că D , E și k_s , nu depind de poziție. Relația precedentă este ecuația de transport căutată.

13.6- Să se arate că fluxul la difuzia unei specii încărcate electric (cazul difuziei de donori sau acceptori într-un semiconductor) este dat de,

$$F = -D \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{C} \right)^2}} \right] \frac{\partial C}{\partial x},$$

unde C este concentrația speciei difuzate, iar n_i este concentrația intrinsecă a purtătorilor în semiconductorul respectiv. Se va lucra în ipotezele,

- curentul electric este nul pe durata difuziei;
- condiția de neutralitate a sarcinii electrice este asigurată;
- este verificată relația $p_n = n_i^2$, p și n fiind concentrațiile de goluri și electroni în semiconductor.

Soluție

Impuritățile donoare sau acceptoare difuzează în cristalul de semiconductor sub formă ionizată. De aceea trebuie considerate simultan

mișcarea impurității ionizate, a electronilor și a golurilor: purtătorii liberi, fiind mai mobili, vor difuza mai repede decât impuritatea care i-a generat. În consecință distribuțiile sarcinilor de semn opus nu sunt identice, apare o sarcină spațială și un câmp electric ce favorizează mișcarea speciei mai lente. Fluxul de impurități în prezența acestui câmp, este dat de (considerăm pentru simplitate o problemă unidimensională),

$$F(x) = -D \frac{\partial C}{\partial x} + \mu \cdot EC = -D_{ef} \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Am presupus, pentru precizare, că specia difuzată este încărcată pozitiv (donori ionizați). Câmpul intern este dat de prima dintre ipotezele indicate în enunț,

$$j = j_n + j_p = q(n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p)E(x) + q \left(D_n \frac{dn}{dx} - D_p \frac{dp}{dx} \right) = 0,$$

deci,

$$E(x) = \frac{k_B \cdot T}{q} \cdot \frac{\mu_p \frac{dp}{dx} - \mu_n \frac{dn}{dx}}{n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p}.$$

Am neglijat în expresia curentului total termenul datorat impurității, ceea ce se justifică prin mobilitatea ei mult mai redusă decât cea a purtătorilor liberi. Celelalte două ipoteze indicate permit să scriem,

$$\begin{cases} p + C = n \\ pn = n_i^2 \end{cases}$$

unde am avut în vedere faptul că la temperatura ridicată a procesului de difuzie toate impuritățile sunt ionizate. Trebuie remarcat aici că ipoteza neutralității electrice nu este valabilă. Existența unui câmp electric intern presupune existența unei sarcini spațiale necompensate, însă vom admite aici că aceasta este neglijabil de mică (condiția de cvasi-neutralitate). Sistemul de ecuații pentru n și p scris anterior conduce la,

$$\begin{cases} n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{C^2 + 4n_i^2} + C \right) \\ p = \frac{1}{2} \left(\sqrt{C^2 + 4n_i^2} - C \right) \end{cases},$$

astfel încât expresia câmpului electric devine

$$E(x) = \frac{k_B \cdot T}{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{C^2 + 4n_i^2}} \frac{\partial C}{\partial x}$$

Înlocuind-o în relația pentru flux și ținând cont de relația lui Einstein se obține,

$$D_{ef} = D \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{C} \right)^2}} \right]$$

Cazuri limită:

$$D_{ef} = D, \text{ dacă } C \ll n_i$$

$$D_{ef} = 2D, \text{ dacă } C \gg n_i$$

13.7- Folosind rezultatele intermediare ale problemei precedente, să se estimeze câmpul electric intern de la suprafață în condițiile unei predifuzii de bor la 1200°C, după o oră. Se dau $C_s = 5.10^{20} \text{ cm}^{-3}$ (concentrația constantă de suprafață la predifuzie), $n_i(1200^\circ\text{C}) = 8.10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $D = 0,36 \text{ mm}^2/\text{h}$.

Soluție

Se știe că profilul de impurități după predifuzie este dat de,

$$C(x) = C_s \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D_{ef} \cdot t}}\right)$$

Având în vedere relația pentru câmpul electric, obținută în problema anterioară, se obține,

$$E(0) = \frac{k_B \cdot T}{q\sqrt{\pi D_{ef} \cdot t}} \cdot \frac{C_s}{\sqrt{C_s^2 + 4n_i^2}} = 0,6 \text{ V}/\mu\text{m}.$$

14. FIZICA DISPOZITIVELOR CU SEMICONDUCTORI

14.1- Să se determine potențialul de baraj și lărgimea regiunii golite pentru o joncțiune gradată la echilibru.

Soluție

Vom face presupunerea că regiunea de sarcină spațială este complet golită de purtători (aproximația de golire). Pentru o joncțiune liniar gradată, în interiorul regiunii de sarcină spațială, densitatea de sarcină are expresia (v. Fig. 25),

$$\rho = -aqx, \quad -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2},$$

unde a este gradientul concentrației de impurități. Atunci ecuația lui Poisson capătă forma,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \cdot \epsilon} = \frac{qa}{\epsilon_0 \cdot \epsilon} \cdot x.$$

Am considerat aici că dimensiunile în planul xy sunt suficient de mari pentru a putea neglija orice dependență de z și y a mărimilor ce apar,

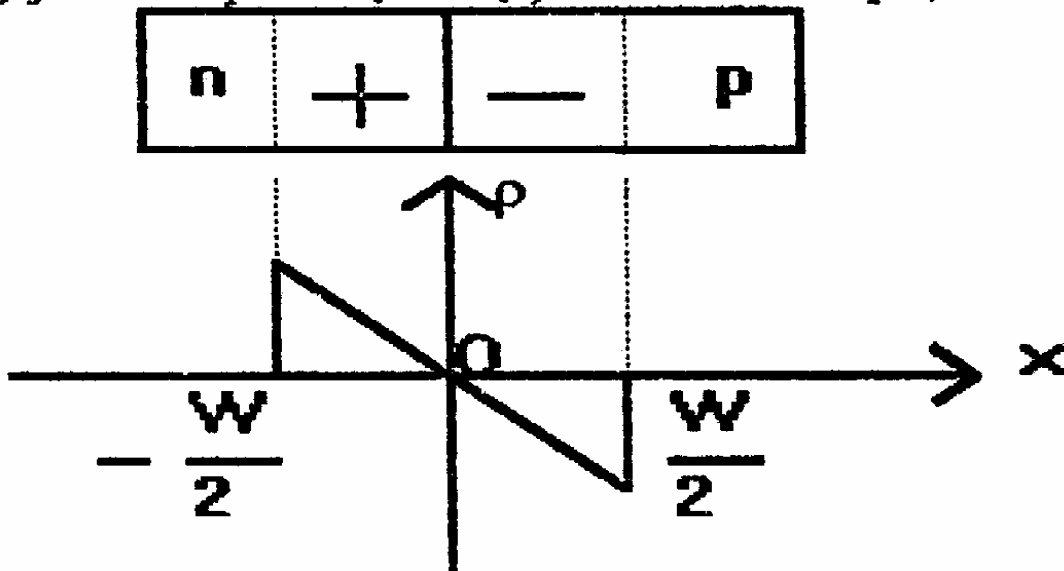


Fig. 25

Integrând ecuația precedentă se obțin câmpul electric,

$$E = -\frac{dV}{dx} = -\frac{qa}{2\epsilon_0 \cdot \epsilon} \cdot x^2 + C_1$$

și potențialul,

$$V = \frac{qa}{6\epsilon_0 \cdot \epsilon} \cdot x^3 + C_1 x + C_2,$$

unde C_1 și C_2 sunt două constante de integrare. Cele două constante sunt definite de condițiile la limită:

- regiunea de sarcină spațială se extinde simetric de-o parte și de alta a joncțiunii metalurgice;
- la limita regiunii de sarcină spațială câmpul electric este nul,

$$E\left(x = \frac{W}{2}\right) = E\left(x = -\frac{W}{2}\right) = -\frac{dV}{dx}\Big|_{x=\pm\frac{W}{2}};$$

- alegem ca referință pentru potențial valoarea din regiunea neutră p,

$$V\left(\frac{W}{2}\right) = 0.$$

Cu aceste condiții se obțin pentru cele două constante valorile,

$$\begin{cases} C_1 = \frac{qaW^2}{8\epsilon_0 \cdot \epsilon} \\ C_2 = \frac{qaW^3}{24\epsilon_0 \cdot \epsilon} \end{cases}$$

care conduc la următoarele rezultate,

$$E(x) = -\frac{qa}{2\epsilon_0 \cdot \epsilon} \left(x^2 - \frac{W^2}{4} \right),$$

$$V(x) = \frac{qa}{6\epsilon_0 \cdot \epsilon} \left(x^3 - \frac{6}{8} W^2 x + \frac{W^3}{4} \right),$$

Potențialul de baraj este,

$$V\left(x = -\frac{W}{2}\right) = V_B = \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{N_a \cdot N_d}{n_i^2}$$

de unde rezultă imediat lățimea regiunii de sarcină spațială,

$$W = \sqrt[3]{\frac{12 \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot V_B}{qa}}$$

14.2- Să se determine caracteristica C-V în cazul unei joncțiuni liniar gradate.

Soluție

Vom considera regimul de polarizare inversă și vom determina capacitatea stratului de baraj. La polarizare inversă tensiunea pe joncțiune este,

$$V_T = V + V_B$$

unde V este tensiunea de polarizare, iar V_B este potențialul de baraj. Lățimea stratului sărăcit este dată de relația găsită în problema precedentă, cu înlocuirea V_B cu V_T :

$$W(V) = \left(\frac{12 \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot (V + V_B)}{qa} \right)^{1/3}$$

Prin urmare la o variație a tensiunii de polarizare se înregistrează o variație a mărimii W , deci o variație a sarcinii electrice din regiunea sărăcită,

$$Q = S \int_0^W \rho(x) dx = Sqa \frac{W^3}{8} = \frac{Sqa}{8} \left(\frac{12 \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot (V + V_B)}{qa} \right)^{2/3}$$

unde S este aria secțiunii transversale a joncțiunii.

Rezultă deci pentru capacitatea stratului de baraj expresia,

$$C_b = \left| \frac{dQ}{dV} \right| = \frac{C_{b0}}{\sqrt[3]{1 + \frac{V}{V_B}}}$$

unde am notat,

$$C_{b0} = S \left(\frac{qae^2 \varepsilon_0^2}{12 V_B} \right)^{1/3}$$

14.3- O diodă este fabricată astfel,

- materialul inițial este siliciu de tip n, $N_d = 6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$;
- predifuzia cu bor conduce la $Q = 10^{15}$ atomi de bor/cm²;

• difuzia timp de o oră, la 1200°C ($D=0,42 \text{ mm}^2/\text{h}$).

Aria joncțiunii este $S=10^{-3} \text{ cm}^2$. Să se calculeze capacitatea ei la 0 V și la 10 V în cadrul aproximațiilor de joncțiune abruptă asimetrică și respectiv, joncțiune gradată liniar. Care aproximație este mai bună în fiecare din cele două cazuri?

Soluție

Este necesar să se determine adâncimea joncțiunii, x_j , și gradientul concentrației de impurități în acest punct, a . Distribuția de impurități după difuzie, în condițiile precizate în enunț este, după cum se știe, de tip gaussian. Concentrația totală de impurități este,

$$N(x) = \frac{Q}{\sqrt{\pi \cdot Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) - N_d,$$

iar planul fizic al joncțiunii este dat de condiția,

$$N(x_j) = 0.$$

Se obține,

$$x_j = 2\sqrt{Dt} \left(\ln \frac{Q}{N_d \sqrt{\pi \cdot Dt}} \right)^{1/2} = 2,9 \text{ } \mu\text{m}.$$

Gradientul concentrației de impurități în dreptul joncțiunii este deci,

$$a = \left. \frac{dN}{dx} \right|_{x=x_j} = \frac{N_d \cdot x_j}{2Dt} = 2 \cdot 10^{21} \text{ cm}^{-1}.$$

Vom examina pentru început cazul joncțiunii abrupte. Pentru acest tip de joncțiune se cunosc,

$$\begin{cases} V_B = 2 \frac{k_B \cdot T}{q} \ln \frac{N_d}{n_i} \\ C_b = C_{b0} \left(1 + \frac{V}{V_B} \right)^{-1/2} \\ C_{b0} = S \left(\frac{q N_d \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon}{2 V_B} \right)^{1/2} \end{cases}.$$

și având în vedere că pentru Si $n_i=10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $\epsilon=12$, se obține,

$$\begin{cases} V = 0 \text{ V} \Rightarrow C_b = 74,04 \text{ pF} \\ V = 12 \text{ V} \Rightarrow C_b = 21,59 \text{ pF} \end{cases}$$

În celălalt caz, al joncțiunii liniar gradate, folosind rezultatele problemei precedente, rezultă,

$$\begin{cases} V = 0 \text{ V} \Rightarrow C_b = 34,55 \text{ pF} \\ V = 12 \text{ V} \Rightarrow C_b = 13,90 \text{ pF} \end{cases}$$

La tensiunea $V=0 \text{ V}$ aproximația liniară este cea mai bună, dat fiind procedeul de obținere al joncțiunii, la tensiunea $V=10 \text{ V}$ aproximația de joncțiune asimetrică devine mai bună (W este mare, caracter asimetric pronunțat al joncțiunii). Se poate determina o limită de valabilitate pentru fiecare model în felul următor: aproximația joncțiunii liniar gradate devine nesatisfăcătoare dacă,

$$W > \frac{2N_d}{a},$$

adică $V=12 \text{ V}$. La tensiuni de polarizare inversă apropiate de această valoare joncțiunea poate fi considerată cu o bună aproximație ca fiind asimetrică.

14.4- Să se calculeze conductanța la semnal mic pentru o joncțiune invers polarizată.

Soluție

Curentul prin joncțiunea invers polarizată are o componentă de generare (datorată perechilor electron-gol generate în regiunea de sarcină spațială) și una de difuzie (datorată perechilor generate în regiunile adiacente regiunii de sarcină spațială, de lărgime L_n în regiunea neutră p și L_p în regiunea neutră n, $L_{n,p}$ fiind lungimile de difuzie ale celor două tipuri de purtători). Deci,

$$I = I_{\text{gen}} + I_{\text{dif}} = \frac{1}{2} qS \frac{n_i}{\tau} W + qS \left(D_p \frac{n_i^2}{N_d L_p} + D_n \frac{n_i^2}{N_a L_n} \right)$$

unde S este aria secțiunii transversale a joncțiunii, W este lărgimea regiunii de sarcină spațială, iar N_a și N_d sunt concentrațiile de acceptori în regiunea p și respectiv de donori în regiunea n.

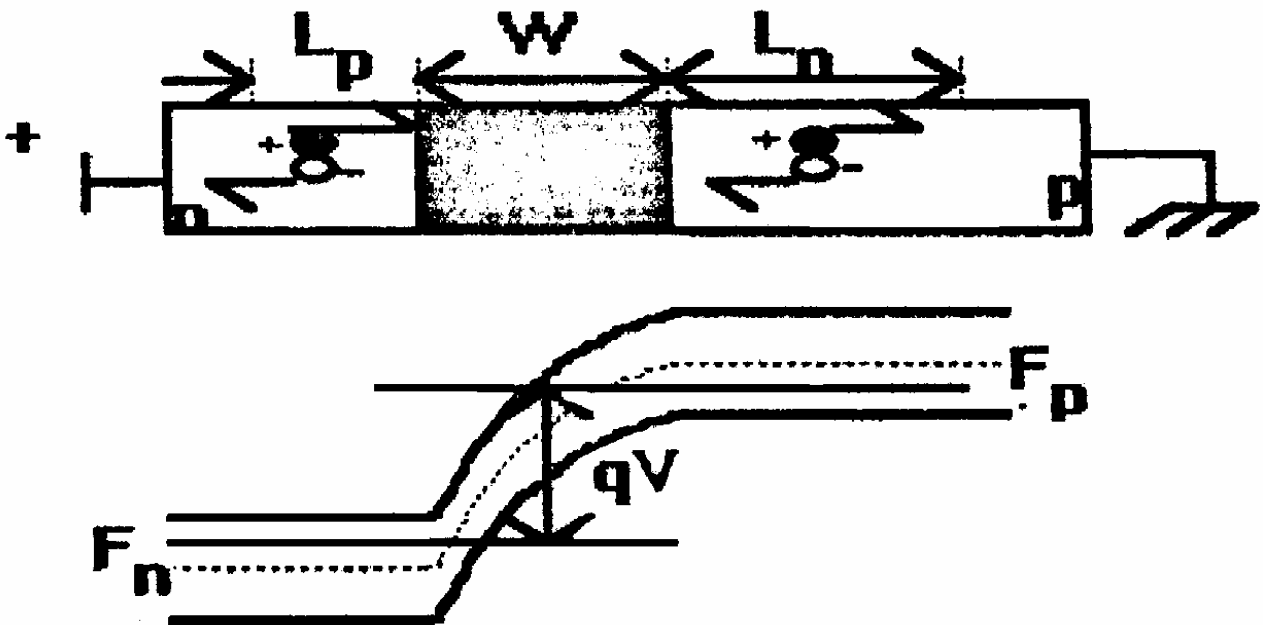


Fig.26

Numai curentul de generare depinde de tensiunea aplicată V , prin intermediul lărgimii regiunii golite, W , deci expresia conductanței este

$$G_{inv} = \frac{dI}{dV} = \frac{dI_{gen}}{dV} = \frac{1}{2} qS \frac{n_i}{\tau} \frac{dW}{dV}$$

Cunoscând expresia lărgimii regiunii de sarcină spațială,

$$W = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot (V + V_B)}{qN_d}}$$

relația precedentă devine,

$$G_{inv} = \frac{1}{2} S \frac{n_i}{\tau} \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon}{WN_d}$$

Făcând să apară în relația de mai sus expresia curentului de generare, se obține expresia simplă:

$$G_{inv} = \frac{I_{gen}}{2(V + V_B)}$$

14.5- Să se determine conductanța de semnal mic a unei joncțiuni direct polarizate, considerând ambele componente ale curentului direct.

Soluție

Caracteristica I-V pentru o joncțiune direct polarizată, în care se ia în considerație recombinarea pe centri simpli (cu un singur nivel, aflat în vecinătatea mijlocului benzii interzise) a purtătorilor de sarcină în regiunea golită este,

$$I = I_{rec} + I_{dif} = I_{0,rec} \exp\left(\frac{qV}{2k_B \cdot T}\right) + I_{0,dif} \exp\left(\frac{qV}{k_B \cdot T}\right)$$

Prin urmare expresia conductanței este,

$$G_{dir} = \frac{dI}{dV} = \frac{q}{k_B \cdot T} \left(\frac{I_{rec}}{2} + I_{dif} \right)$$

Se poate deasemeni utiliza expresia generală a curentului direct,

$$I = I_0 \exp\left(\frac{qV}{mk_B \cdot T}\right)$$

de unde,

$$G_{dir} = \frac{dI}{dV} = \frac{qI}{mk_B \cdot T}$$

Comparând rezultatele de mai sus cu cel obținut în problema precedentă, se constată valoarea evident mai mare a conductanței la polarizare directă.

14.6- Să se determine, pe baza unui argument calitativ simplu, semnul dependenței de temperatură a tensiunii de străpungere prin avalanșă a unei joncțiuni.

Soluție

La creșterea temperaturii drumul liber mediu al purtătorilor scade, probabilitatea lor de ciocnire cu rețeaua în regiunea de sarcină spațială crește.

Pentru a declanșa străpungerea prin avalanșă trebuie crescut câmpul electric, deci tensiunea inversă aplicată joncțiunii. Rezultă de aici că semnul variației cu temperatura a tensiunii de străpungere la multiplicarea în avalanșă este pozitiv.

14.6- Să se calculeze factorul de transport pentru un tranzistor pnp .

Soluție

În cazul unui tranzistor pnp factorul de transport se definește prin,

$$\alpha_p = \frac{\text{curentul de goluri care ajunge la colector}}{\text{curentul de goluri injectat în bază}} = \frac{\left. \frac{dp_n}{dx} \right|_{x=W_B}}{\left. \frac{dp_n}{dx} \right|_{x=0}}$$

Trebuie deci determinată mai întâi distribuția purtătorilor minoritari (golurile) în regiunea bazei. Această distribuție este dată de ecuația de difuzie în regim

$$D_p \frac{d^2 p_n}{dx^2} - \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} = 0,$$

cu condițiile la limită,

$$\begin{cases} p_n(0) = p_{n0} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{k_B \cdot T}\right) \\ p_n(W_B) = 0 \end{cases}$$

Am presupus nivel mic de injecție, astfel încât transportul purtătorilor minoritari injectați în bază să poată fi complet descris prin difuzie, V_{EB} este tensiunea de polarizare a joncțiunii emitor-bază, iar W_B este lățimea bazei. A doua condiție la limită se justifică astfel: joncțiunea colector-bază este invers polarizată și îndată ce un purtător minoritar ajunge la marginea regiunii ei de sarcină spațială câmpul electric îl trece imediat dincolo de ea. Soluția ecuației de difuzie de mai sus este de forma,

$$\Delta p_n(x) = p_n(x) - p_{n0} = A \exp\left(\frac{x}{L_p}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{L_p}\right); \quad L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau_p},$$

și utilizând condițiile la limită pentru determinarea constantelor, se obține,

$$p_n(x) = p_{n0} \left(1 - \frac{\sinh \frac{x}{L_p}}{\sinh \frac{W_B}{L_p}} \right) + [p_n(0) - p_{n0}] \frac{\sinh \frac{W_B - x}{L_p}}{\sinh \frac{W_B}{L_p}}$$

Gradienții concentrației de goluri pentru $x=W_B$ și $x=0$ sunt,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dp_n}{dx} \Big|_{x=W_B} &= -\frac{1}{L_p \sinh \frac{W_B}{L_p}} \left[p_{n0} \left(\cosh \frac{W_B}{L_p} - 1 \right) + p_n(0) \right] \equiv -\frac{p_n(0)}{L_p \sinh \frac{W_B}{L_p}} \\ \frac{dp_n}{dx} \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{L_p \sinh \frac{W_B}{L_p}} \left[p_{n0} \left(1 - \cosh \frac{W_B}{L_p} \right) + p_n(0) \cosh \frac{W_B}{L_p} \right] \equiv -\frac{p_n(0) \cosh \frac{W_B}{L_p}}{L_p \sinh \frac{W_B}{L_p}} \end{aligned} \right.$$

deci,

$$\alpha_T = \frac{1}{\cosh \frac{W_B}{L_p}}$$

Am considerat că $W_B \ll L_p$ condiție îndeplinită într-un tranzistor de calitate.

14.7- La iradierea unui tranzistor cu doze mari de neutroni rapizi sau electroni energici, se constată că timpul de viață al purtătorilor în exces scade cu doza de iradiere conform relației,

$$\tau_p = \frac{\tau_{p0}}{1 + \alpha \Phi}$$

unde F este doza, τ_{p0} timpul de viață înainte de iradiere, iar α o constantă empirică. Presupunând că eficiența emitorului este 1, să se determine o relație care să dea curentul de bază și factorul de amplificare în curent în conexiunea cu emitorul în comun, β , ca funcție de doză și de valorile lor înainte de iradiere.

Soluție

Dacă $V_{EB} \gg k_B T/q$ și $W_B \ll L_p$, cum este adesea cazul, distribuția golurilor în bază, găsită în problema precedentă, se reduce la,

$$p_n(x) = p_{n0} \left(1 - \frac{x}{W_B} \right),$$

iar curentul de difuzie al golurilor injectate în bază este,

$$\left. \begin{aligned} I_{dif,B} &= -qD_{pB} S \frac{dp_n}{dx} \Big|_{x=0} \\ p_{n0} &= \frac{n_i^2}{N_{dB}}, \quad p_n(0) = p_{n0} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{k_B \cdot T}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$I_{dif,B} = qD_{pB} S \frac{n_i^2}{N_{dB} W_B} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{k_B \cdot T}\right),$$

S fiind aria secțiunii joncțiunii emitor-bază. Faptul că eficiența emitorului este 1 conduce la,

$$\gamma = \frac{I_{dif,B}}{I_E} = 1 \Rightarrow I_E = I_{dif,B},$$

și din definiția lui α_T (v. pb. 14.6) obținem pentru curentul de bază expresia,

$$I_B = I_E (1 - \alpha_T) = qS \frac{n_i^2}{N_{dB}} \cdot \frac{W_B}{2\tau_p} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{k_B \cdot T}\right)$$

unde am folosit în expresia lui α_T o dezvoltare în serie în ordinul 2 ($W_B \ll L_p$). Introducând aici expresia din enunț pentru timpul de viață după iradiere, rezultă

$$I_B = I_{B0} (1 + \alpha\Phi),$$

deci o creștere liniară a curentului de bază cu doza de radiație. Cu aceleași considerații, pentru factorul de amplificare în curent se obține,

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{\alpha_T \cdot I_E}{(1 - \alpha_T) I_E} \cong \frac{2L_p^2}{W_B^2} = \frac{2D_p \cdot \tau_p}{W_B^2} = \frac{\beta_0}{1 + \alpha\Phi},$$

adică o variație de tip hiperbolic.

ANEXA 1

CĂTEVA PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALELOR FERMI

Integrala Fermi de indice j , $\Phi_j(\eta)$, este definită prin,

$$\Phi_j(\eta) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^\eta \frac{\varepsilon^j \cdot d\varepsilon}{1 + \exp(\varepsilon - \eta)}$$

$\Gamma(j+1)$ fiind funcția gamma a lui Euler. În limita clasică (gaz electronic nedegenerat, $\eta < 0$ și suficient de mare în valoare absolută) expresia integralei se reduce la,

$$\Phi_j(\eta) \cong \exp(\eta).$$

Pentru valori pozitive mari ale lui η (în statistică acest caz corespunde degenerării aproape complete) este valabilă dezvoltarea asimptotică,

$$\Phi_j(\eta) = \frac{\eta^{j+1}}{\Gamma(j+2)} \left[1 + \frac{\pi^2}{6\eta^2} \cdot \frac{\Gamma(j+2)}{\Gamma(j)} + \dots \right].$$

Pentru integrala $\Phi_{1/2}(\eta)$ adesea este utilă următoarea formulă aproximativă,

$$\Phi_{1/2}(\eta) = \frac{\exp(\eta)}{1 + 0,27 \exp(\eta)},$$

valabilă dacă $\eta < 1,5$, eroarea nedepășind în acest caz 3%. Tot o eroare sub 3% dă formula,

$$\Phi_{1/2}(\eta) = \frac{4\eta^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1,15}{\eta^2} \right)$$

pentru $\eta > 1$. Astfel cele două formule precedente acoperă întregul interval de valori al lui η , de la cele corespunzătoare degenerării totale, până la cele corespunzătoare cazului clasic.

Pentru estimarea integralelor ce conțin funcții Fermi sau derivatele lor, în cazul degenerat, se folosește dezvoltarea,

$$\int_{-\infty}^{\eta} \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon} \cdot \frac{1}{1 + \exp(\epsilon - \eta)} d\epsilon = -G(\infty) + G(\eta) + \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{d^2G}{d\epsilon^2} \Big|_{\epsilon=\eta} + \dots$$

valabilă dacă $G(\epsilon)$ este o funcție lent variabilă în vecinătatea punctului $\epsilon = \eta$.

ANEXA 2

CITIVA PARAMETRI AI MATERIALELOR SEMICONDUCTOARE

Grupa	Materiaul	Banda interzisă (eV,300K)	Mobilitatea electronilor [$\text{cm}^2/\text{V.s}$]	Mobilitatea golurilor [$\text{cm}^2/\text{V.s}$]	Structura de benzi ¹⁾	Masa efectivă ²⁾ a electronilor (m^*/m_0)	Masa efectivă a golurilor (m^*/m_0)	Constanta dielectrică relativă
IV	Ge	0.603	3900	1900	Ge	$m_e=1.64$ $m_t=0.662$	$m_p=0.04$ $m_{ph}=0.5$	16
IV	Si	1.12	1500	600	Si	$m_e=0.97$ $m_t=0.19$	$m_p=0.15$ $m_{ph}=0.5$	11.8
III-V	AlSb	1.63	200	420	GaAs	0.3	0.4	11
	GaSb	0.67	4000	1400	GaAs	0.047	0.5	15
	GaAs	1.43	8500	400	GaAs	0.068	0.5	10.9
	GaP	2.24	110	75	Si	0.5	0.5	10
	InSb	0.16	78000	750	GaAs	0.013	0.6	17
	InAs	0.33	33000	460	GaAs	0.02	0.41	14.5
	InP	1.29	4600	150	GaAs	0.07	0.4	14
II-VI	CdS	2.42	300	50	GaAs	0.17	0.6	10
	CdSe	1.7	600	-	GaAs	0.13	0.45	10
	ZnO	3.2	200	-	GaAs	0.27	-	9
	ZnS	3.6	165	-	GaAs	1.1	-	8
IV-VI	PbS	0.41	600	700	-	0.66	0.5	17
	PbTe	0.32	6000	4000	-	0.22	0.29	30

¹⁾ Simbolurile Ge, Si și GaAs desemnează o structură de benzi similară cu cea a acestor materiale (benzi energetice indirecte în cazul Ge și Si, indirecte în cazul GaAs).

²⁾ m_l - masa efectivă longitudinală în banda de conducție; m_t - masa efectivă transversală în banda de conducție; m_p - masa efectivă a golurilor ușoare; m_{ph} - masa efectivă a golurilor grele.

BIBLIOGRAFIE

1. I.Dima, I.Munteanu, **Materiale și dispozitive semiconductoare**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
2. I.Pop, M.Crișan, **Fizica corpului solid și a semiconductoarelor**, Editura Didactică și Pedagogică, 1983.
3. I.I.Nicolaeșcu, V.G. Canțer, **Fizica corpului solid**, Tipografia SPT, Chișinău, 1991.
4. V.Dolocan, **Fizica dispozitivelor cu corp solid**, Editura Academiei, București, 1981.
5. Gh. Cloban, C.Constantinescu, **Fizica stării solide**, Editura Tehnică, București, 1982.
6. I.S.Blakemore, **Semiconductor Statistics**, New York, 1962.
7. K. Seeger, **Semiconductor Physics**, Springer-Verlag, Wien -New York, 1973.
8. A.S. Davidov, **Teoria corpului solid**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
9. H.V. Alexandru, **Știința și tehnologia materialelor**, Editura Universității București, 1990.
10. I. Munteanu, A. Dafinei, B. Logofătu, **Materiale și componente electronice cu semiconductori**, Editura Universității București, 1985.
11. I.D. Bursuc, N.D. Sulițanu, **Solidul**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1991.
12. S. Nan, I. Munteanu, Gh. Băluță, **Dispozitive fotonice cu semiconductori**, Editura Tehnică, 1986.
13. P.S. Kireev, **Fizica semiconductoarelor**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977.
14. I. Lica, **Fizica metalelor**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
15. I. Pop, V. Crișan, **Calculul benzilor de energie în corpul solid**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987.
16. V.M. Cătuneanu, P.I. Svasta (coordonatori), **Tehnologie electronică**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
17. A. Meșter, **Introducere în fizica iradierii substanței**, Vol. I și Vol. II, Editura Universității București, 1986.
18. I. Lica, **Fizica stării solide**, Editura Universității București, 1990.

ISBN 973-9160-74-3

Lei 1216